МАТЕМАТИКА 11

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА
ГЕОМЕТРИЯ
ЧАСТЬ I

Учебник для 11 классов средних
образовательных учреждений и
учреждений среднего специального,
профессионального образования

Утвержден Министерством народного образования
Республики Узбекистан

ТАШКЕНТ
2018

УДК: 51(075.32)
ББК: 22.1уа72
М 63

Авторы части "Алгебра и начала анализа"

Мирзаахмедов М. А., Исмаилов Ш. Н., Аманов А. К.

Автор части "Геометрия":

Хайдаров Б. К.

Рецензенты:

Бешимов Р. Б. – зав.кафедрой "Геометрия и топология" НУУ им. Мирзо Улугбека, доктор физико-математических наук.

Жуманиёзов К. С. – доцент кафедры "Методика преподавание математики" физико-математического факультета ТГПУ имени Низами, кандидат педагогических наук.

Розимов Р. О. – учитель математики школы №237 Сергелийского района;

Жуманиёзова С. Б. – методист РЦО.

Сунбердиева С. Р. – учитель математики специализированной школы №6 Сергелийского района.

Использованные в учебнике обозначения и пояснения к ним:

△ – Начало решения задачи

▲ – конец решения задачи

! – задания контрольных работ и тестовые задания

? – вопросы и задачи

– основная информация

* – задачи повышенной трудности

Издано за счёт средств Республиканского целевого книжного фонда

ISBN: 978-9943-5127-7-1

ГЛАВА I
ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ

1–2 ОТНОШЕНИЕ ПРИРАЩЕНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ И ЕЁ СМЫСЛ. ПОНЯТИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ. ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ

Отношение приращений переменных

В человеческой жизнедеятельности часто приходится встречаться с отношением двух переменных величин, измеряемых в различных единицах измерения.

Например, *скорость* автомобиля, как отношение пройденного пути к затраченному времени измеряется в *км/ч* или в *м/с*, а расход топлива в *литрах/км*.

Далее, результативность бросков баскетболиста определяется количеством набранных очков за одну игру.

Пример. В учебно-производственном комплексе ученикам 11 -класса было дано задание, оценивающее качество и скорость компьютерного набора текста.

Карим за 3 минуты набрал 213 слов, и при этом допустил 6 орфографических ошибок, а Наргиза за 4 минуты набрала 260 слов, допустив при этом 7 орфографических ошибок. Сравните их результаты.

△ Составим соответствующие отношения для каждого учащегося:

Карим:

скорость набора текста: $\dfrac{213 \text{ слов}}{3 \text{ мин}} = 71 \dfrac{\text{слово}}{\text{мин}}$;

качество набора текста: $\dfrac{6 \text{ ошибок}}{213 \text{ слов}} \approx 0{,}0282 \dfrac{\text{ошибок}}{\text{слов}}$.

Наргиза:

скорость набора текста: $\dfrac{260 \text{ слов}}{4 \text{ мин}} = 65 \dfrac{\text{слов}}{\text{мин}}$;

качество набора текста: $\dfrac{7 \text{ ошибок}}{260 \text{ слов}} \approx 0{,}0269 \dfrac{\text{ошибок}}{\text{слов}}$.

Значит, Карим набирал текст быстрее Наргизы. В то же время отметим, что Наргиза справилась с заданием качественнее Карима. ▲

Задания

1. Для проверки частоты пульса двумя пальцами слегка надавливают место на запястье, где проходит артерия, пока не почувствуют биение. Когда Мадина проверяла свой пульс, она насчитала 67 ударов в минуту.

а) Объясните, что такое частота пульса? В чём она измеряется?

б) Оцените, сколько раз у Мадины за час бьётся сердце?

2. Карим, придя домой, набрал на компьютере 14 страниц текста. Выяснилось, что он на этот раз допустил 8 орфографических ошибок. Известно, что текст в одну страницу состоит в среднем из 380 слов.

а) Определите качество набора текста Каримом и сравните его с результатом в предыдущем примере. Улучшил ли Карим качество набора?

б) Сколько ошибок в среднем допустит Карим, набирая текст из 100 слов?

3. Маруф, работая 12 часов, очистил арык длиною 148 м 20 см, а Мурад, работая 13 часов, очистил арык длиною 157 м 95 см. Сравните производительность труда обоих.

4. Глубина протектора новой автомобильной шины составляет 8 мм. После пробега 32178 км в результате износа глубина протектора шины стала равна 2,3 мм.

а) Как изменяется глубина протектора шины после прохождения расстояния в 1 км?

б) А после после пробега в 10000 км?

5. Мадина выехала из города Карши в 11:43 и прибыла в город Гулистан в 15:49. С какой средней скоростью перемещалась Мадина, если она проехала 350 км пути?

Пример. Ёмкость цилиндрической формы с одинаковой скоростью заполняется водой. При этом в силу того, что вода заполняет ёмкость пропорционально времени, её уровень (высота над дном ёмкости) изменяется с течением времени как линейная функция времени (см. рис.1).

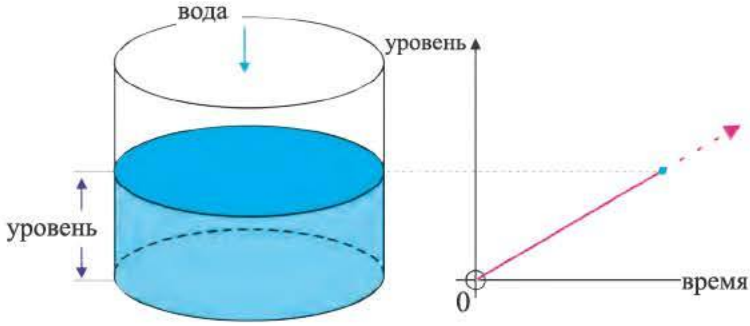


Рисунок 1.

Отметим, что в этом случае отношение уровня воды ко времени (то есть *скорость изменения* высоты) остаётся постоянной. Теперь рассмотрим ёмкости другой формы (рисунок 2):

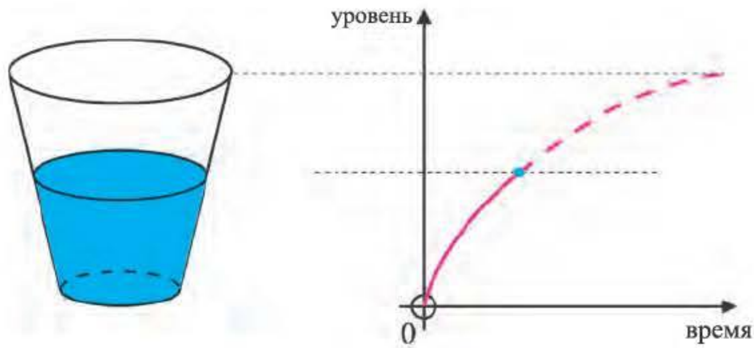


Рисунок 2.

Справа на рисунке показано, как изменяется уровень воды по отношению ко времени.

Вопрос 1. На рисунке 3 изображена цистерна, предназначенная для воды.

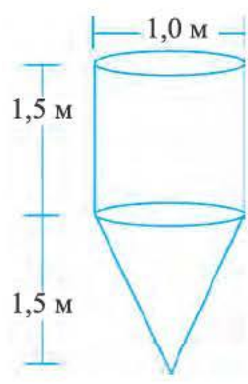


Рисунок 3.

В начале цистерна пуста. После этого цистерну стали заполнять водой со скоростью «один литр в секунду». На каком из графиков на рисунке 4, верно изображено изменение уровня воды по отношению ко времени?

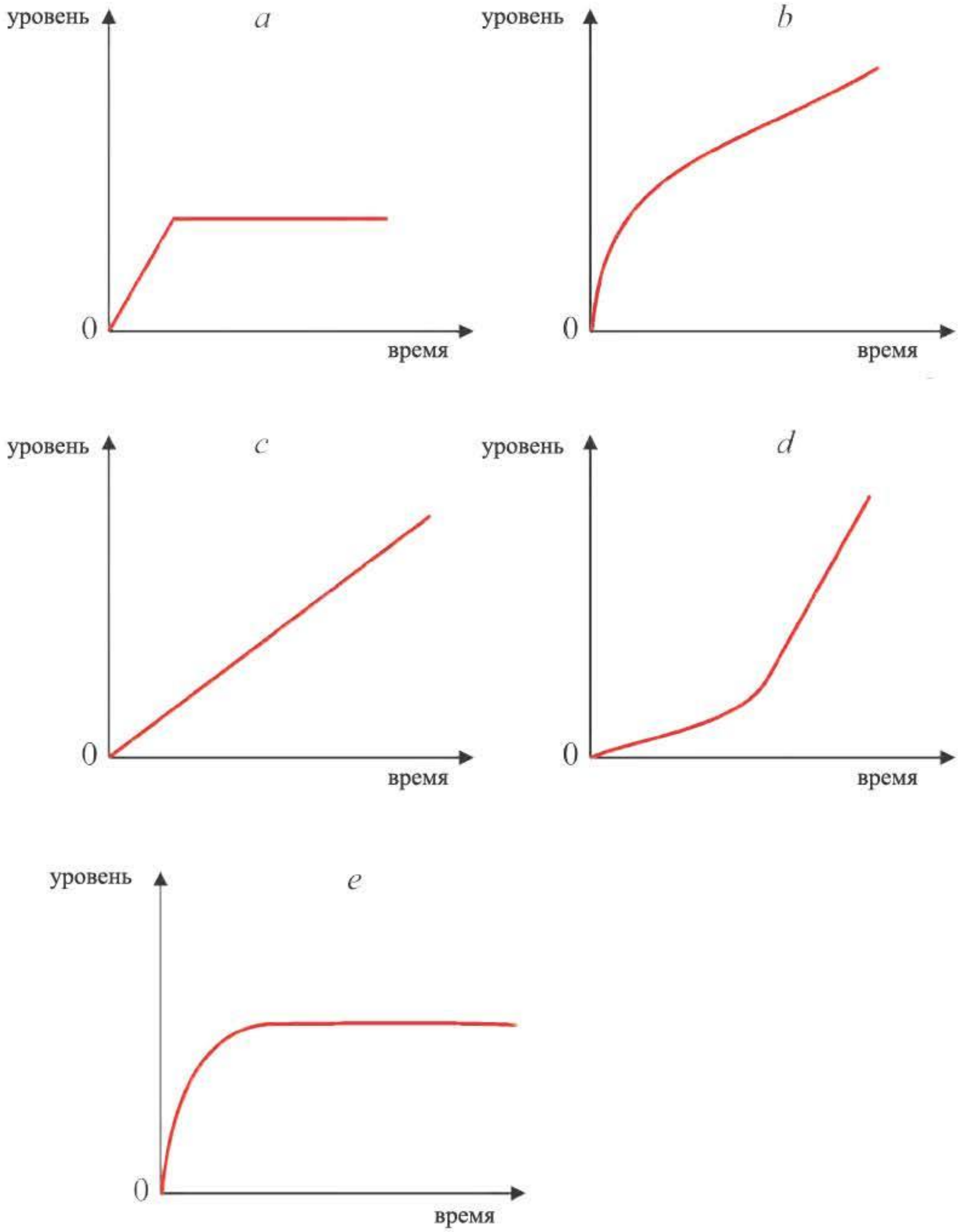


Рисунок 4.

Вопрос 2. На рисунке 4 изображены графики, изображающие изменение уровня воды по отношению ко времени.

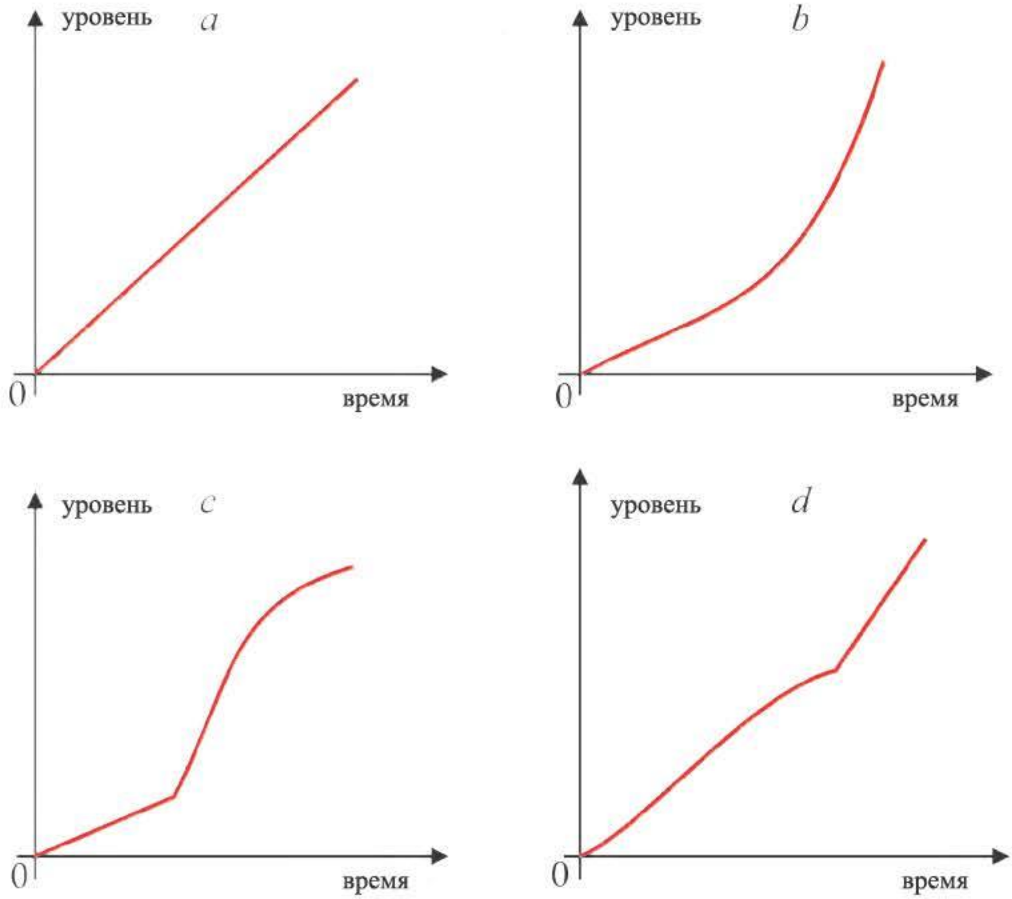


Рисунок 5.

Каким ёмкостям рисунка 6 они соответствуют?

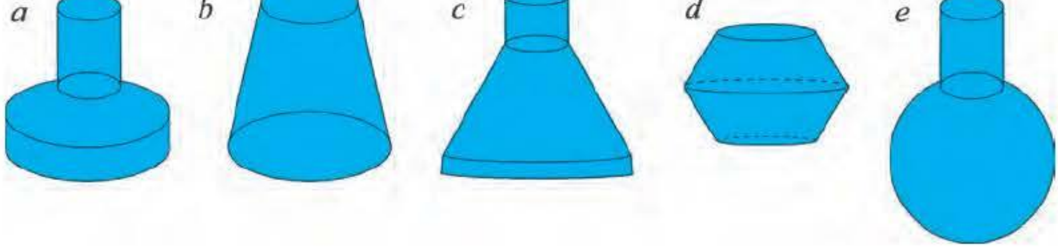


Рисунок 6.

Средняя скорость изменения

Если зависимость двух переменных величин описывается линейной функцией, то отношения изменений этих величин есть величина постоянная.

В случае, когда зависимость двух переменных величин не описывается линейной функцией, то мы можем рассматривать отношение изменений этих величин на заданном интервале. Ясно, что если мы будем выбирать эти интервалы различными, то соответствующие отношения будут тоже различными.

Пример 1. На рисунке 7 изображён график зависимости положения материальной точки от времени t:

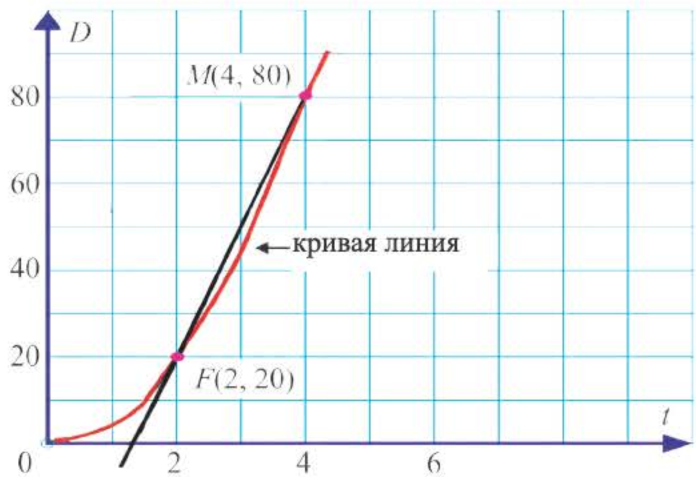


Рисунок 7.

△ Рассмотрим точку F на графике, соответствующую моменту времени t=2 секунды, а также отличную от точки F точку M (например точку, соответствующую моменту времени t=4). Найдём среднюю скорость на интервале времени. $2 \leq t \leq 4$

$$\frac{(80-20)\text{м}}{(4-2)\text{с}} = 30\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Видно, что угловой коэффициент секущей FM равен 30. ▲

Вопрос. Считая точку F неподвижной, заполните таблицу угловых коэффициентов секущей FM, где M- точка на графике, соответствующая заданному значению t:

t	Угловой коэффициент
0	
1,5	
1,9	

t	Угловой коэффициент
3	
2,5	
2,1	

1,99	

2,01	

Сформулируйте свои выводы.

Пример 2. Число особей в популяции мышей меняется с течением времени (измеряемого в неделях) в соответствии с графиком (рис.8):

Рисунок 8.

Как меняется количество особей в промежутке между 3 и 6 – неделями? А в течении 7 недель?

△ Найдём скорость изменения популяции мышей в промежутке между 3 и 6 – неделями

$\frac{(240-110)\ \text{мышей}}{(6-3)\ \text{недели}} \approx 43\frac{\text{мышей}}{\text{недели}}$, значит, количество особей в в течении в промежутке между 3 и 6 – неделями росло со средней скоростью 43 особи в неделю.

Точно также в течении 7 недель $\frac{(315-50)\ \text{мышей}}{(7-0)\ \text{недели}} \approx 38\frac{\text{мышей}}{\text{недели}}$.

Значит, количество особей в течении 7 недель росло со средней скоростью 38 особей в неделю. ▲

В общем случае, когда величина x меняется в промежутке между a и b, ***средняя скорость*** изменения величины $y=f(x)$ определяется как отношение приращений

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

где $f(b)-f(a)$ – приращение функции, а $b–a$ – приращение аргумента.

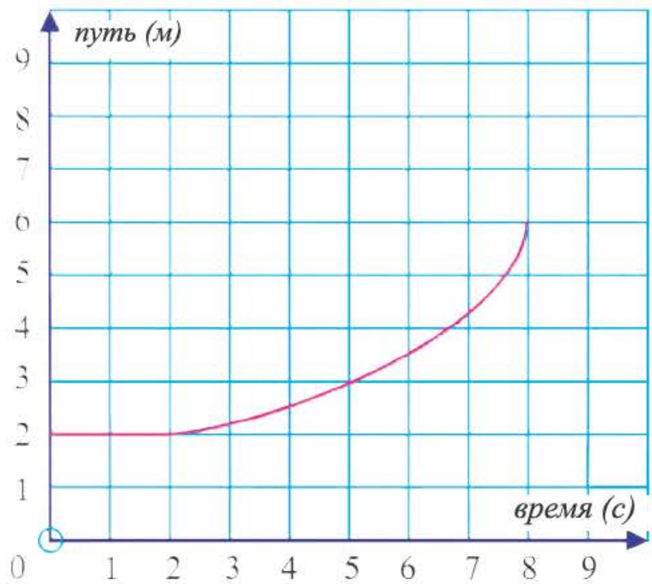
Обозначив $h = b - a$, получим, что средняя скорость равна

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Общепринято называть числитель дроби $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *приращением функции* $y=f(x)$, *соответствующим приращению* h *аргумента* x. Сама дробь называется *разностным отношением*.

Задания

6. Пусть график зависимости перемещения точки вдоль прямой от времени изображён на рисунке 9.



Риунок 9.

Найдите скорость перемещения точки:

а) в течение первых 4 секунд;

б) в течение последних 4 секунд;

в) в течение всех 8 секунд.

7. Известно, что для борьбы с сельскохозяйственными вредителями поле обрабатывают химикатами. График, изображённый на рисунке 10, описывает изменение числа вредных насекомых на площади 1 $м^2$ в зависимости от соответствующей дозы химикатов:

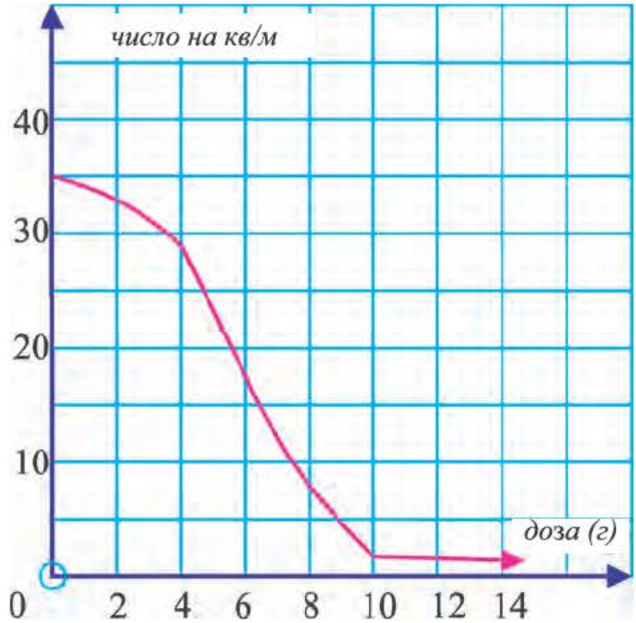


Рисунок 10.

а) Определите, как изменяется число вредных насекомых на площади 1 $м^2$ в случаях, когда 1) доза изменяется от 0 грамм до 10 грамм; 2) доза изменяется от 0 до 7 грамм.

б) Какой эффект наблюдается, когда доза изменяется от 10 грамм до 14 грамм?

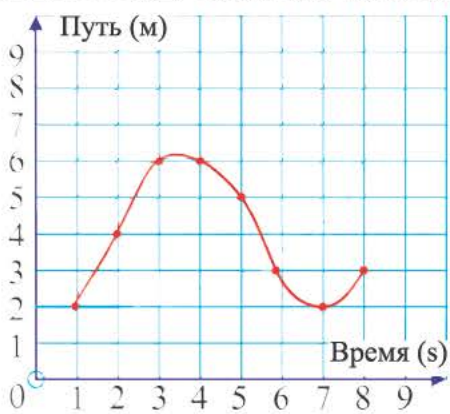
2) на рисунке изображён график закона движения $s(t)$ материальной точки, движущейся по прямой.

а) чему равны числа $s(2)$, $s(3)$, $s(5)$, $s(7)$?

б) на каких интервалах функция возрастает?

в) на каких интервалах функция убывает?

г) вычислите приращения $s(3)–s(1)$, $s(5)–s(4)$, $s(7)–s(6)$, $s(8)–s(6)$.



3–4 ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$. Предположим, что значения x приближаются к числу 2, всё время оставаясь меньше его, и составим таблицу значений:

x	1	1,9	1,99	1,999	1,9999
$f(x)$	1	3,61	3,9601	≈ 3,996 00	≈ 3,999 60

Из этой таблицы видно, что при неограниченном приближении (*стремлении*) значения x к 2, значения функции $f(x)$ неограниченно стремятся к числу 4.

В таких случаях говорят, что *функция* $f(x)$ *стремится к 4 при стремлении аргумента* (*переменной*) x *к 2 слева.*

Теперь предположим, что значения x приближаются к числу 2, оставаясь больше его, и составим таблицу значений:

x	3	2,1	2,01	2,001	2,0001
$f(x)$	9	4,41	4,0401	≈ 4,004 00	≈ 4,000 40

В таких случаях говорят, что *функция* $f(x)$ *стремится к 4 при стремлении аргумента* (*переменной*) x *к 2 справа.*

Объединяя вышеуказанные два случая, будем говорить, что *функция* $f(x)$ *стремится к 4 при стремлении аргумента* (*переменной*) x *к 2* и записывать так: $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4.$

Данная запись читается так:

Предел функции $f(x)$ *при стремлении аргумента* (*переменной*) x *к 2* равен 4.

В общем случае понятие *предела функции* определяется следующим образом:

Пусть значения $x \neq a$ стремятся к a, а значения $f(x)$ стремятся к числу A. Тогда число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при стремлении аргумента* (*переменной*) x *к* a и обозначается так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A.$

В таких случаях также говорят, что *функция* $f(x)$ *стремится к* A *при стремлении* x *к* a .

Вместо записи $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ также применяют запись

$$f(x)\to A \text{ при } x\to a$$

Напоминание. Отметим важность условия $x\neq a$ при стремлении x к a.

Пример. Найдём предел функции $f(x)=\dfrac{5x+x^2}{x}$ при $x\to 0$.

△ Представим себе, что условие $x\neq 0$ не выполнено, т.е. $x=0$ если мы непосредственно попытаемся подставить значение в $f(x)$, то получим *неопределённость* вида $\dfrac{0}{0}$.

С другой стороны, так как $f(x)=\dfrac{x(5+x)}{x}$, то эта функция имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 5+x, \text{ если } x\neq 0 \\ \text{не определено }, \text{ если } x=0 \end{cases}$$

График функции $y=f(x)$ представляет собой прямую вида $y=x + 5$ с «выколотой» точкой (0; 5) (рисунок 11):

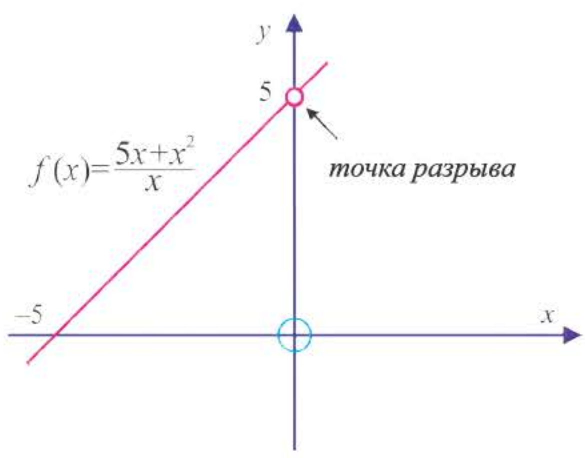


Рисунок 11.

Точка с координатами (0; 5) называется *точкой разрыва* функции $y=f(x)$.

Видно, что для всех точек, отличных от точки (0; 5), при стремлении x к 0 соответствующие значения функции $f(x)$ стремятся к 5, то есть существует предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+x^2}{x}=5$. ▲

На практике для нахождения предела функции, полезно произвести соответствующие алгебраические преобразования.

Пример 1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

△ а) Когда значения x стремятся к 2, значения x^2 стремятся к 4, то есть $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

б) Так как $x \neq 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x} = \lim_{x\to 0}(x+3) = 3.$$

в) Так как $x \neq 3$, то

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6. \text{ ▲}$$

Упражнение

Найдите пределы (**8-11**):

8. а) $\lim\limits_{x\to 3}(x+4)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}(5-2x)$; в) $\lim\limits_{x\to 4}(3x-1)$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-3x+2)$; д) $\lim\limits_{h\to 0} h^2(1-h)$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+5)$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 5} 5$; б) $\lim\limits_{h\to 2} 7$; в) $\lim\limits_{x\to 0} c$, c – постоянная.

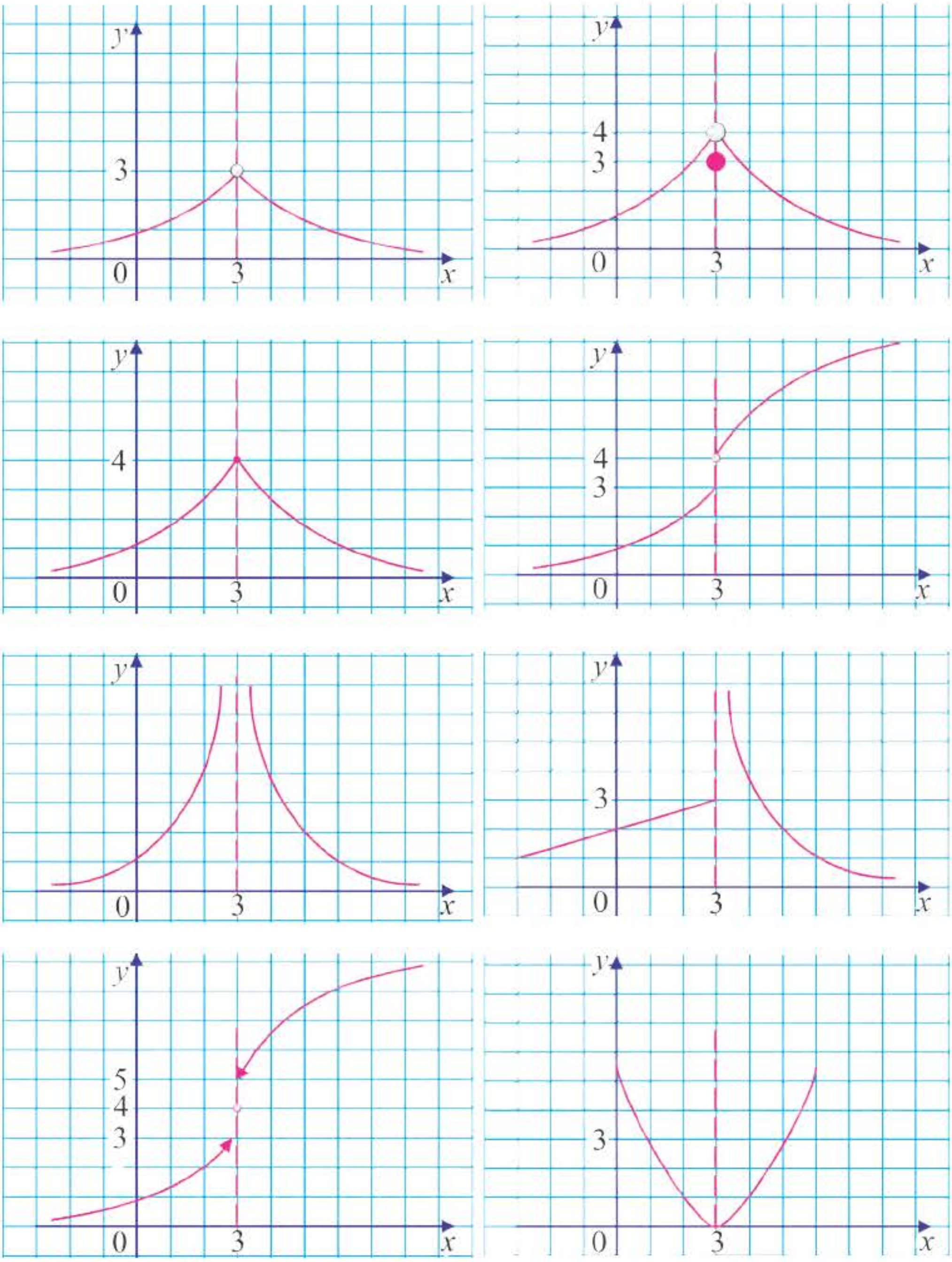
10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x}{x}$; б) $\lim\limits_{h\to 2}\frac{h^2+5h}{h}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-5x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2-x}{x}$;

г) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{2h^2+6h}{h}$; д) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{3h^2-4h}{h}$; е) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^3-8h}{h}$;

ё) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}$; ж) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}$; з) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$.

12. Какие из функций имеют предел при $x \to 3$? Найдите эти пределы.



5–6 ПРОИЗВОДНАЯ, ЕЁ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

На рисунке 12 изображены кривая, касательная и секущая.

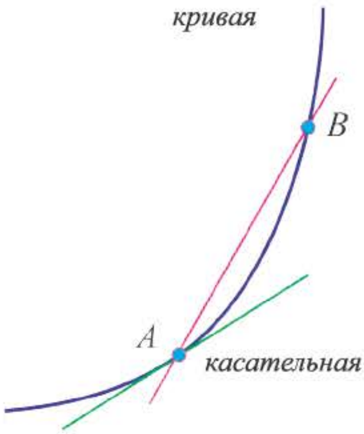


Рисунок 12.

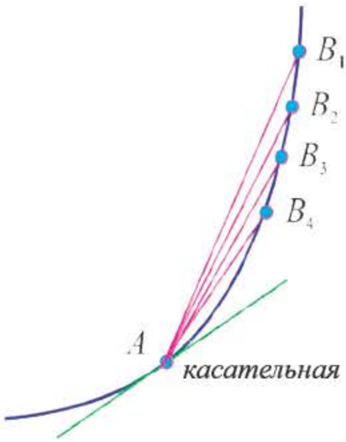


Рисунок 13.

Пусть точка B последовательно принимает положения B_1, B_2, ..., стремясь к точке A по кривой (рисунок 13). Тогда интуитивно ясно, что соответствующие секущие стремятся принять положение касательной к кривой в точке A.

В этом случае очевидно, что угловой коэффициент прямой AB стремится к угловому коэффициенту касательной.

Пример 1. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=x^2$ в точке $A(1;\ 1)$ (рисунок 14).

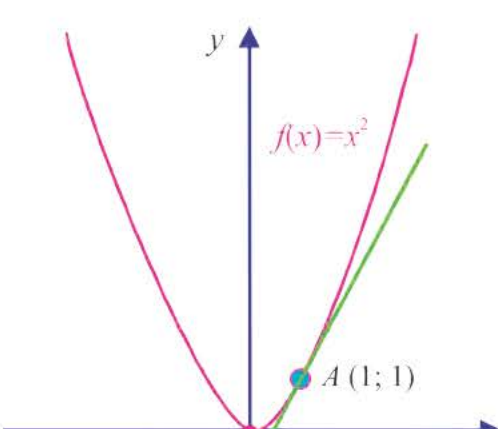


Рисунок 14.

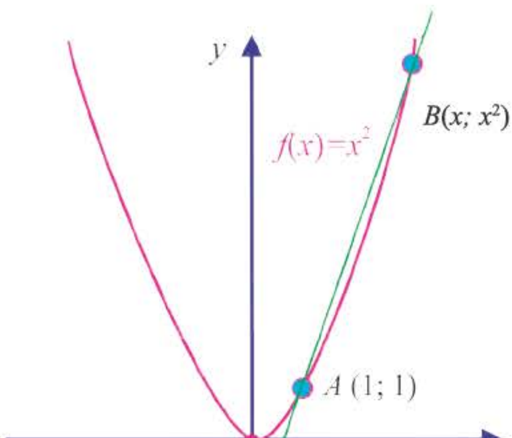


Рисунок 15.

△ Рассмотрим произвольную точку $B(x, x^2)$, принадлежащую графику функции $f(x)=x^2$ (рисунок 15).

Угловой коэффициент прямой AB равен

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \text{ или } \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Когда точка B стремится к A по кривой, значение x стремится к 1 при этом $x \neq 1$.

Значит, угловой коэффициент прямой AB стремится к угловому коэффициенту касательной:

$$k=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2\cdot$$

Поэтому, $k=2$. ▲

Пусть задана функция $y=f(x)$. Рассмотрим точки $A(x, f(x))$ ва $B(x+h, f(x+h))$ – принадлежащие графику функции (рисунок 16).

Угловой коэффициент прямой AB равен разностному отношению

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Когда точка B стремится к A по кривой, значение приращения h стремится к 0. При этом секущая AB стремится к касательной к графику функции $y=f(x)$, проведённой в точке A.

Вместе с этим, угловой коэффициент секущей AB стремится к угловому коэффициенту касательной.

Иначе говоря, при стремлении h к 0, угловой коэффициент $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ касательной к графику функции, проведённой к произвольной точке равен предельному значению $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

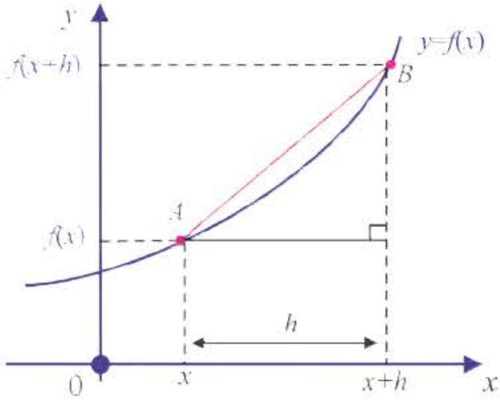


Рисунок 16.

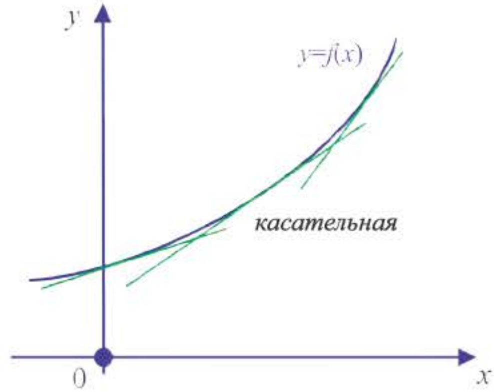


Рисунок 17.

Отметим, что для каждого x такого, что вышеуказанный предел существует, можно поставить в соответствие единственное значение углового коэффициента касательной, проведённой к графику функции в точке $(x, f(x))$ (рисунок 17).

Значит, формула $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ определяет новую функцию.

Эта функция называется **производной функцией** (кратко производной) функции $y=f(x)$.

Определение. **Производной** функции $y=f(x)$ называется предел:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (1)$$

в случае, когда он существует.

Обычно производную функции $y=f(x)$ обозначают через $f'(x)$.

Операцию нахождения производной называют дифференцированием.

Иногда вместо обозначения $f'(x)$ используется обозначение $\dfrac{dy}{dx}$.

«Дробный» вид этого обозначения можно объяснить следующим образом.

Если мы введём новые обозначения для приращений $h=\Delta x$, $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$, тогда выражение

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ можно написать в виде

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{dy}{dx}$ (рисунок 18).

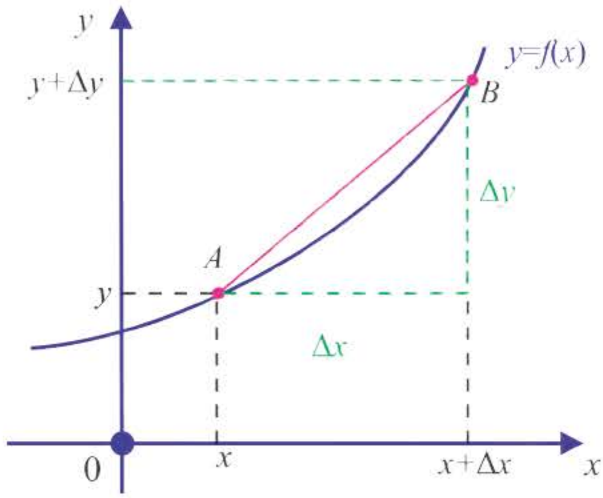


Рисунок 18.

Исходя из вышесказанного, можно прийти к следующему выводу: Значение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции, проведённой в точке с абсциссой в этой точке.

В этом и заключается *геометрический смысл* производной.

Пример 2. Материальная точка движется по прямой в соответствии с законом $s=s(t)$ (здесь s измеряется в метрах, а t в секундах). Найдём скорость $v(t)$ материальной точки в момент времени t.

△ Интуитивно ясно, что искомая мгновенная скорость точки на малом интервале времени приблизительно равна средней скорости $v(t)=\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$. Когда Δt стремится к нулю, разность между средней скоростью и мгновенной скоростью тоже стремится к нулю. Значит, мгновенная скорость материальной точки в момент времени t равна

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t).$$ ▲

Таким образом, мгновенная скорость материальной точки в момент времени t равна производной функции $s(t)$.

В этом и заключается *физический смысл* производной. Вообще говоря, производная определяет *скорость изменения* функции.

Примеры

Исходя из определения, найдите производные функции.

1. $f(x)=x^2$; **2.** $f(x)=5$; **3.** $f(x)=x^3-7x+5$;

4. $f(x)=x^4$; **5.** $f(x)=\dfrac{1}{x}$; **6.** $f(x)=\sqrt{x}$; **7.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

△ **1.** Так как $h\neq0$, то

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2+x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x.$$

2. Так как $h\neq0$, то $f(x+h)=5$, $f(x+h)-f(x)=5-5=0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{h}=0,\ \text{значит}\ f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

3. Так как $h\neq0$, то

$f(x+h)=(x+h)^3-7(x+h)+5=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-7x-7h+5;$

$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-7x-7h+5-x^3+7x-5=$

$=3x^2h+3xh^2+h^3-7h.$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-7h}{h}=3x^2+3xh+h^2-7.$$

Ясно, что при $h\to0$ $3xh+h^2\to0$, тогда

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2-7.$$

Согласно формулам сокращённого умножения

$a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2).$

Значит, $(x+h)^4-x^4=(x+h-x)(x+h+x)((x+h)^2+x^2)=$

$=h(2x+h)(2x^2+2xh+h^2)=2hx(2x+h)(x+h)+h^3(2x+h)=$

$=2hx(2x^2+h(3x+h))+h^3(2x+h)$; $h\to0$ то,

$2h^2x(3x+h)\to0$, $h^3(2x+h)\to0$. Отсюда

$$\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}=\lim_{h\to0}(4x^3+2hx(3x+h))+h^2(2x+h))=4x^3.$$

Значит $f'(x)=(x^4)'=4x^3$.

5. $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\neq0.$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}=-\frac{h}{(x+h)x},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-1}{(x+h)x}.$$

Из-за того, что $h\to 0$ следует $x+h\to x$. Значит $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

6. $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$, $x+h>0$. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

Упростим:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

При $h\to 0$ имеем $\sqrt{x+h}\to\sqrt{x}$. Отсюда получим $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

7. Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\frac{x+h-x}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

При $h\to 0$ имеем $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}\to\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Отсюда получим

$\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Ответ: **1.** $2x$. **2.** 0. **3.** $3x^2-7$. **4.** $4x^3$. **5.** $-\frac{1}{x^2}$. **6.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **7.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. ▲

Напомним, что когда величина x меняет свои значения в пределах от x до $x+h$, то *средняя скорость* изменения величины $y=f(x)$ равна разностному отношению

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

При этом выражение $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ означает *мгновенную скорость* изменения величины $y=f(x)$.

Упражнения

13. Чему равны производные функций:

а) $f(x)=x^3$; б) $f(x)=x^{-1}$; в) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$; г) $f(x)=c$.

14. Перепишите в тетрадь таблицу и заполните её:

а)

$f(x)$	$f'(x)$
x^1	
x^2	
x^3	
x^{-1}	
$x^{\frac{1}{2}}$	

б) Как вы думаете, чему равна производная функции $y=x^n$ (здесь n – рациональное число)?

15. Пользуясь определением, найдите производную функции:

а) $f(x)=2x+3$; б) $f(x)=3x^2+5x+1$; в) $f(x)=2x^3+4x^2+6x-1$.

16*. Перепишите в тетрадь и заполните пропуски:

а) если $f(x)=ax+b$, то $f'(x)=\ldots$;

б) если $f(x)=ax^2+bx+c$, то $f'(x)=\ldots$;

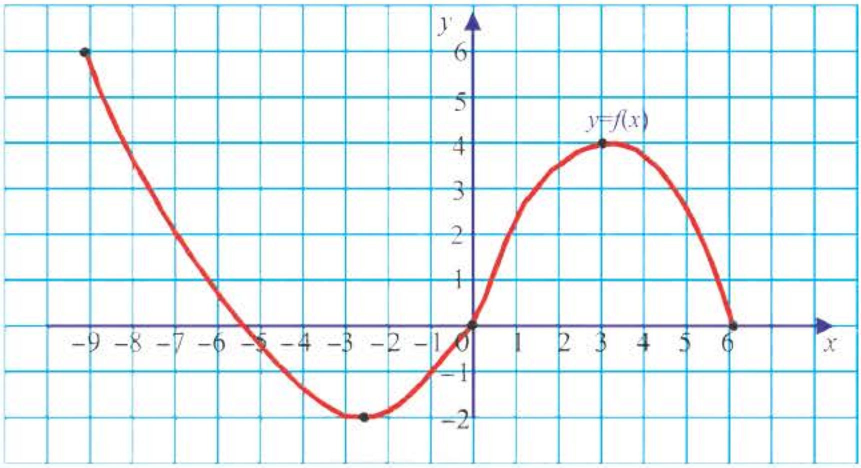
в) если $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, то $f'(x)=\ldots$

17*. Докажите утверждения:

а) если $f(x)=cg(x)$, то $f'(x)=cg'(x)$;

б) если $f(x)=g(x)+h(x)$, то $f'(x)=g'(x)+h'(x)$.

18*. Сравните значения производных, опираясь на график:



а) $f'(-7)$ и $f'(-2)$; в) $f'(-9)$ и $f'(0)$;
б) $f'(-4)$ и $f'(2)$; г) $f'(-1)$ и $f'(5)$.

19. 1). Рассмотрев вышеуказанный график, найдите точки x_1, x_2, удовлетворяющие условиям (здесь x_1, x_2 – точки на оси Ox, принимающие значения $-9, -8, ..., 5, 6$):

а) $f'(x_1) > 0,\ f'(x_2) > 0$; б) $f'(x_1) < 0,\ f'(x_2) > 0$;

в) $f'(x_1) < 0,\ f'(x_2) < 0$; г) $f'(x_1) > 0,\ f'(x_2) < 0$.

2) Рассмотрев график, ответьте на следующие вопросы:

а) на каком интервале функция возрастает? на каком убывает?

б) чему равны приращения функции на промежутках [0; 3], [3;6], [–9; –6]?

3) В каких точках функция принимает наибольшее значение, а в каких наименьшее?

4) На каком интервале функция принимает положительные значения?

5) На каком интервале функция принимает отрицательные значения?

7–9 ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции, имеющие производные. Тогда справедливы следующие правила дифференцирования:

1. Производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x). \quad (1)$$

2. Производная разности равна разности производных:

$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x). \quad (2)$$

Пример 1. Найдите производную функции:

1) $f(x)=x^3+x^2-x+10$; 2) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

∆ Воспользуемся правилами 1, 2 и 1,3 – пунктами таблицы производных (*см.стр.27*):

1) $f'(x)=(x^3)'+(x^2)'-(x)'+10=3x^2+2x-1;$

2) $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'-\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$

Ответ: 1) $3x^2+2x-1$; 2) $\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. ▲

3. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:
$(cf(x))'=c\cdot f'(x)$, c – постоянная (3)

Пример 2. Найдите производную функции:

1) $f(x)=7x^3-5x^2+4$; 2) $f(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}-x^3$.

∆ Воспользуемся правилами 1, 2, 3 и 1, 3 – пунктами таблицы производных:

1) $f'(x)=(7x^3-5x^2+4)'=(7x^3)'-(5x^2)'+(4)'=21x^2-10x;$

2) $f'(x)=\left(3\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}-x^3\right)'=3\left(\sqrt{x}\right)'+5\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'-(x^3)'=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2}-3x^2.$

Ответ: 1) $21x^2-10x$;; 2) $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2}-3x^2$. ▲

4. Производная произведения:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \qquad (4)$$

Пример 3. Найдите производную функции:

1) $f(x)=(2x+4)(3x+1)$; | 2) $f(x) = (3x^2+4x+1)(2x+6)$; | 3) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^2-5x\right)$.

Δ Воспользуемся правилами 1, 3, 4 и 1, 3 – пунктами таблицы производных:

1) $f'(x)=((2x+4)(3x+1))'=(2x+4)'(3x+1)+(2x+4)(3x+1)'=$
$=2(3x+1)+3(2x+4)=6x+2+6x+12=12x+14;$

2) $f'(x)=((3x^2+4x+1)(2x+6))'=(3x^2+4x+1)'(2x+6)+$
$+(3x^2+4x+1)(2x+6)'=(6x+4)(2x+6)+2(3x^2+4x+1)=18x^2+52x+26.$

3) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^2-5x\right)\right)'=\left(\sqrt[3]{x}\right)'\left(x^2-5x\right)+\sqrt[3]{x}\left(x^2-5x\right)'=$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(x^2-5x\right)+\sqrt[3]{x}\left(2x-5\right)=\frac{x^2-5x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\left(2x-5\right)\sqrt[3]{x}=\frac{x^2-5x+3\left(2x-5\right)\sqrt[3]{x^3}}{3\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\frac{x^2-5x+6x^2-15x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7x^2-20x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x\left(7x-20\right)}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\left(7x-20\right).$$

Ответ: 1) $12x+14$; 2) $18x^2+52x+26$; 3) $\frac{\sqrt[3]{x}}{3}(7x-20)$. ▲

5. Производная отношения:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad \text{здесь} \quad g(x)\neq 0. \qquad (5)$$

Пример 4. Найдите производную функции:

1) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$; 2) $f(x)=\frac{3x+7}{x-5}$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{5x-7}$.

Δ Воспользуемся правилами 1, 3, 5 и 1, 3 – пунктами таблицы производных:

1) $f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\frac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2}=-\frac{3}{(x-2)^2}$;

2) $f'(x)=\left(\frac{3x+7}{x-5}\right)'=\frac{(3x+7)'(x-5)-(3x+7)(x-5)'}{(x-5)^2}=$

$$=\frac{3(x-5)-(3x+7)\cdot 1}{(x-5)^2}=\frac{3x-15-3x-7}{(x-5)^2}=-\frac{22}{(x-5)^2};$$

3) $f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{5x-7}\right)'=\frac{(\sqrt{x})'\cdot(5x-7)-\sqrt{x}\cdot(5x-7)'}{(5x-7)^2}=$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-7)-\sqrt{x}\cdot 5}{(5x-7)^2}=\frac{5x-7-10x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}=-\frac{7+5x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}.$$

Ответ: 1) $-\frac{3}{(x-2)^2}$; 2) $-\frac{22}{(x-5)^2}$; 3) $-\frac{7+5x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}$. ▲

Пример 5. Найдите:

1) $f(x)=\sin x$; 2) $f(x)=\cos x$; 3) $f(x)=\operatorname{tg} x$.

∆ 1) Для нахождения разностного отношения воспользуемся формулой разности синусов:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2}.$$

Можно показать, что при $h\to 0$ $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$, $\cos\frac{2x+h}{2}\to\cos x$.

Значит, $(\sin x)'=\cos x$.

2) Для нахождения разностного отношения воспользуемся формулой разности косинусов:

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{h}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\frac{2x+h}{2}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin(x+\frac{h}{2}).$$

Можно доказать, что при $h\to 0$ $\sin(x+\frac{h}{2})\to\sin x$.

Значит, $(\cos x)'=-\sin x$.

3) Воспользовавшись правилом 5 дифференцирования, а также результатами, полученными выше, найдём производную:

$$f'(x)=(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ответ: 1) $(\sin x)'=\cos x$; 2) $(\cos x)' = -\sin x$; 3) $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. ▲

Таблица производных

№	***Функция***	*Производная*
1.	c – постоянная	0
2.	$kx+b$, k, b – *постоянные*	k
3.	x^p, p – постоянная	px^{p-1}
4.	$\sin x$	$\cos x$
5.	$\cos x$	$-\sin x$
6.	$\mathrm{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
7.	$\mathrm{ctg}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
8.	a^x, $a>0$	$a^x \ln a$
9.	e^x	e^x
10.	$\ln x$	$1/x$
11.	$\lg x$	$\frac{1}{x \cdot \ln 10}$
12.	$\log_a x$, $a>0$, $a=1$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

? Вопросы и задания

1. Расскажите о правилах дифференцирования. Приведите примеры на каждое из них.

2. Докажите справедливость 4, 5 пунктов таблицы производных.

3. Объясните производной функции в точке $x=x_0$.

Упражнения

Найдите производную (**20–22**):

20. 1) $y = x^4$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 3) $y = \dfrac{1}{x^3}$.

21. 1) $y = x^4 - x^2 + x$; 2) $y = \dfrac{1}{x} + x$; 3) $y = x^3 + \sqrt[3]{x}$;

4) $y = x^4 + x^3 + x^2 - x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

22. 1) $y = (x-1)(x^2-5)$; 2) $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$;

3) $y = (x^4 - \sqrt{x})(x^2 + x)$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$.

23. Найдите мгновенную скорость материальной точки в момент времени t_0 если:

1) $s(t) = t^3 - 2t^2 + t$, $t_0 = 5$; 2) $s(t) = 5t + t^3 + \sqrt{t}$, $t_0 = 4$.

24. Вычислить производную в точке с заданной абсциссой:

1) $f(x) = x^2 + 5x - 3$, $x_0 = 1$; 3) $f(x) = 2\sqrt{x} + x^3 + \dfrac{1}{2}$, $x_0 = 4$;

2) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = -2$; 4) $f(x) = x^2 + \lg 2$, $x_0 = 1$.

Найдите производную (**25–29**):

25. 1) $y = 2x^3 - 4x^2 + 5$; 3) $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{4}$;

2) $y = 7x^2 - 2x + \sqrt{7}$; 4) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

26. 1) $y = (x-2)(x+2)$; 3) $y = \dfrac{x^2-9}{x-3}$;

2) $y = (x+2)^3$; 4) $y = x^2 + \lg 7 + \sin\dfrac{\pi}{9}$.

27. 1) $y = x^8 + 7x^2 + 5x$; 2) $y = 2x^8 + x^6$;

3) $y = \dfrac{x^4}{x^6 - 1}$; 4) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$;

5) $y = x^{-2} + \dfrac{1}{x}$; 6) $y = x^4 - 4x$;

7) $y = \sqrt[5]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}$; 8) $y = (x^5 + x^{-5})(x^2 + x^{-2})$.

28. 1) $f(x)=x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$; 2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$; 4) $f(x)=\text{tg}x$; 5) $y=8^x$;

6) $y=\log_2 x+\log_2 3$; 7) $y=2^x x$; 8) $y=x\ln x$;

9) $y=e^x\cos x$; 10) $y=2e^x-\ln x+\dfrac{1}{x}$.

29. 1) $y=2^x\sin x$; 2) $y=e^x(\cos x+\sin x)$; 3) $y=x\text{tg}x$;

4) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; 5) $y=3\sin^2 x$; 6) $y=5x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$;

7) $y=(x+1)(\ln x+1)$; 8) $y=(2+x)^3$; 9) $y=(3x+5)^6+2019$.

30. Найдите мгновенную скорость материальной точки в момент времени t_0:

1) $s(t)=t^2+5t+1$, $t_0=1$; 2) $s(t)=4t^3+\dfrac{1}{t}+1$, $t_0=1$.

31. Вычислить производную в заданной точке:

1) $f(x)=(x+1)^3$, $x_0=-1$; 2) $f(x)=\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

32. Найдите производную:

1) $y=2\sin x$; 2) $y=\sqrt{3}-\text{tg}x$; 3) $y=-3\cos x$; 4) $y=\text{tg}x-\text{ctg}x$;

5) $y=4x-\cos x$; 6) $y=x^2\sin x$; 7) $y=\dfrac{x}{\sin x}$; 8) $y=x\sin x+\cos x$.

33. Вычислить производную в точке x_0:

1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x-5}$, $x_0=2$; 2) $f(x)=\text{tg}x-x+2$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

3) $f(x)=x(\lg x-1)$, $x_0=10$; 4) $f(x)=\text{tg}x-\dfrac{1}{2}\ln x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

34. Найдите точку, в которой производная обращается в нуль:

1) $f(x)=x^4-4x$; 2) $f(x)=\text{tg}x-x$;

3) $f(x)=x^8-2x^4+3$; 4) $f(x)=\log_2 x-\dfrac{x}{\ln 2}$.

10–12 ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция. Рассмотрим функцию $y = (x^2 + 3x)^4$ Если ввести обозначения $g(x)=x^2+3x$, $f(x)=x^4$ то функция $y=(x^2+3x)^4$ примет вид $y=f(g(x))$. В дальнейшем мы будем называть функцию вида $y = f(g(x))$ *сложной функцией.*

Пример 1. Пусть $f(x) = x^2$ и $g(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$. Найдите:

1) $f(g(2))$; 2) $f(g(-4))$; 3) $g(f(1))$;

4) $f((-4))$; 5) $f(f(1))$; 6) $g(g(-1))$.

Δ Воспользовавшись заданными функциями, выполним преобразования:

1) $f(g(x))=f\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$, отсюда $f(g(2))=f\left(\dfrac{2-2}{2+3}\right)=f(0)=0^2=0$;

2) $f(g(-4))=f\left(\dfrac{-4-2}{-4+3}\right)=f(6)=6^2=36$;

3) $g(f(1))=g(1^2)=g(1)=\dfrac{1-2}{1+3}=-\dfrac{1}{4}$;

4) $g(f(-4))=g((-4)^2)=g(16)=\dfrac{16-2}{16+3}=\dfrac{14}{19}$;

5) $f(f(1))=f(1^2)=f(1)=1^2=1$;

6) $g(g(-1))=g\left(\dfrac{-1-2}{-1+3}\right)=g\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{-\dfrac{3}{2}-2}{-\dfrac{3}{2}+3}=\dfrac{-3,5}{1,5}=-\dfrac{7}{3}$

Ответ: 1) 0; 2) 36; 3) $-\dfrac{1}{4}$; 4) $\dfrac{14}{19}$; 5) 1; 6) $-\dfrac{7}{3}$. ▲

Для производной сложной функции справедлива формула:

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x) \qquad (1)$$

Пример 2. Найдите производную (здесь k, b – постоянные):

1) $f(x) = (kx + b)^n$; 2) $f(x) = \sin(kx + b)$;
3) $f(x) = \cos(kx + b)$; 4) $f(x) = \mathrm{tg}(kx + b)$.

Δ 1) Применим формулу (1) для функций $f(t) = t^n$ и $t(x) = kx + b$:

$$((kx+b)^n)' = (t^n)' \cdot (kx+b)' = nt^{n-1} \cdot k = n \cdot k \cdot (kx + b)^{n-1}.$$

2) Применим формулу (1) для функций $f(t)=\sin t$ и $t(x) = kx+b$:

$$(\sin(kx+b))' = (\sin t)' \cdot (kx+b)' = k \cdot \cos t = k \cdot \cos(kx + b).$$

3) Применим формулу (1) для функций $f(t) = \cos t$ и $t(x) = kx + b$:

$$(\cos(kx + b))' = (\cos t)' \cdot (kx+b)' = -k \cdot \sin t = -k \cdot \sin(kx + b).$$

4) Применим формулу (1) для функций $f(t) = \mathrm{tg}\, t$ и $t(x) = kx+b$:

$$(\mathrm{tg}(kx + b))' = (\mathrm{tg}\, t)' \cdot (kx + b)' = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot k = \frac{k}{\cos^2(kx+b)}.$$

Ответ: 1) $((kx + b)^n)' = n \cdot k \cdot (kx + b)^{n-1}$; 2) $(\sin(kx + b))' = k \cdot \cos(kx+b)$;
3) $(\cos(kx+b))' = -k \cdot \sin(kx+b)$; 4) $(\mathrm{tg}(kx+b))' = \dfrac{k}{\cos^2(kx+b)}$. ▲

Пример 3. Найдите производную функции $f(x) = \sin 8x \cdot e^{(3x+2)}$.

Δ Воспользуемся правилом 4 дифференцирования и формулой (1):

$$f'(x) = (\sin 8x e^{(3x+2)})' = (\sin 8x)' e^{3x+2} + \sin 8x \cdot (e^{3x+2})' = \cos 8x e^{3x+2} \cdot (8x)' +$$
$$+ \sin 8x e^{3x+2} \cdot (3x+2)' = e^{3x+2} \cdot (8\cos 8x + 3\sin 8x).$$

Ответ: $e^{3x+2} \cdot (8\cos 8x + 3\sin 8x)$. ▲

Пример 4. Найдите значение функции $h(x) = (x^3 + 1)^5$ в точке $x_0 = 1$.

Δ Применим формулу (1):

$h'(x) = 5(x^3+1)^4(x^3+1)' = 5(x^3+1)^4 3x^2 = 15x^2(x^3+1)^4$.

Значит, $h'(1) = 15(1^3+1)^4 \cdot 1^2 = 15 \cdot 16 = 240$. *Ответ*: 240. ▲

Пример 5. Найдите производную функции $f(x) = 2^{\cos x}$.

Δ Применим формулу (1):

$f'(x) = 2^{\cos x} \ln 2 (\cos x)' = -\sin x\, 2^{\cos x} \ln 2$. *Ответ*: $-\sin x\, 2^{\cos x} \ln 2$. ▲

Пример 6. Найдите производную функции $f(x) = \text{tg}^5 x$.

△ Применим формулу (1):

$f'(x) = 5\,\text{tg}^4 x\,(\text{tg}\,x)' = 5\text{tg}^4 x \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Ответ: $\dfrac{5\text{tg}^4 x}{\cos^2 x}$. ▲

Пример 7. Найдите производную функции $h(x)=3^{\cos x}\cdot\log_7(x^3+2x)$.

△ Введём обозначения $f(x)=3^{\cos x}$, $g(x)=\log_7(x^3+2x)$ и применим формулу (1) :

$$f'(x)=(3^{\cos x})'=3^{\cos x}\ln 3\cdot(\cos x)'=-3^{\cos x}\ln 3\cdot\sin x,$$

$$g'(x)=(\log_7(x^3+2x))'=\frac{1}{(x^3+2x)\ln 7}\cdot(x^3+2x)'=\frac{3x^2+2}{(x^3+2x)\ln 7}.$$

Функцию $h(x)$ представим как произведение двух функций:

$$h'(x) = (3^{\cos x}\cdot\log_7(x^3+2x))' = (3^{\cos x})'\cdot\log_7(x^3+2x) +$$

$$+ 3^{\cos x}\cdot(\log_7(x^3+2x))' = -3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7(x^3+2x)+\frac{3^{\cos x}(3x^2+2)}{(x^3+2x)\ln 7}.$$

Ответ: $-3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7(x^3+2x)+\dfrac{3^{\cos x}(3x^2+2)}{(x^3+2x)\ln 7}$. ▲

? Вопросы и задания

1. Дайте понятие сложной функции. Приведите пример.
2. Как вы думаете, как можно определить область определения сложной функции?
3. Напишите формулу для производной сложной функции.
4. Приведите 1–2 примера на нахождение производной сложной функции.

Упражнения

35. Пусть $f(x)=x^2-1$. Найдите следующие функции:

1) $f(\frac{1}{x})$; 2) $f(2x)$; 3) $f(x^2-1)$; 4) $f(x+1)-f(x-1)$.

36. Пусть $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. Найдите следующие функции:

1) $f(\frac{1}{x})$; 2) $f(\frac{1}{x^2})$; 3) $f(x-1)$; 4) $f(x+1)$.

37. Пусть $f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$. Найдите следующие функции:

1) $f(g(x))$; 2) $f(f(x))$; 3) $g(g(x))$; 4) $g(f(x))$.

38. Пусть $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2+1$. Найдите:

1) $\frac{f(x^2)}{g(x)-1}$; 2) $f(x)+3g(x)+3x-2$;

3) $f(g(x))$; 4) $g(f(x))$.

Воспользовавшись равенствами, найдите $f(x)$ (**39–42**):

39. $f(x+1)=x^2-1$. **40*.** $f(x)+3\cdot f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$.

41. $f(x+3)=x^2-4$. **42*.** $2f(x)+f(\frac{1}{x})=x$.

Найдите производную (**43–44**):

43. 1) $f(x)=(3x-2)^5$; 2) $f(x)=e^{\sin x}$; 3) $f(x)=(4-3x)^7$;

4) $f(x)=\sin^2 x$; 5) $f(x)=\frac{1}{(2x+9)^3}$; 6) $f(x)=\ln(4x-1)$;

7) $f(x)=\sqrt{4x-5}$; 8) $f(x)=(2x-1)^{10}$; 9) $f(x)=\cos^8 x$.

44*. 1) $e^{\sin x}\cdot \mathrm{tg}\frac{1}{x}$; 2) $3^{\mathrm{ctg}x}\cdot\log_a\cos x$; 3) $\ln\cos x$;

4) $(x^2-5x+4)^3\cdot 10^{\mathrm{tg}x}$; 5) $7^{\log 3x}\cdot(x^3-2x+1)^3$; 6) $3^{\cos x}\cdot(x^2-8x+4)^2$;

7) $\mathrm{ctg}x\cdot\ln(x^2+x)$; 8) $x^2\cos^{30}x+4$; 9) $5\ln x\cdot\mathrm{ctg}x$.

13–14 УРАВНЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

Уравнение касательной. Найдём уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ (рисунок 19). Так как касательная является прямой, то её уравнение имеет вид $y = kx + b$. Исходя из геометрического смысла производной $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Отсюда следует, что уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_0)x + b$. Так как эта касательная проходит через точку $(x_0; f(x_0))$, то $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$. Отсюда $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Подставив найденное значение b в уравнение касательной, окончательно получим уравнение:

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \quad \text{или}$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

Таким образом, уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

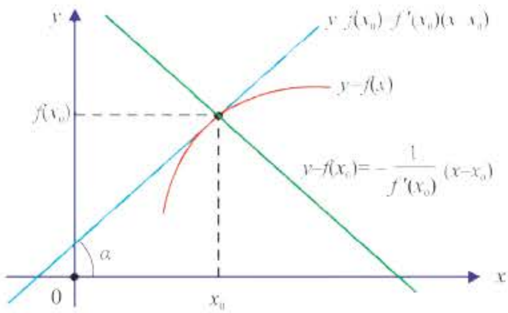


Рисунок 19.

Пример 1. Выпишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 5x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

△ Сначала найдём значение функции и её производной в точке $x_o = 2$:

$$f(x_0) = f(2) = 2^2 - 5\cdot 2 = -6, \quad f'(x) = 2x - 5, \quad f'(2) = 2\cdot 2 - 5 = -1.$$

Подставим найденное в уравнение (1), получим уравнение искомой касательной:

$y - (-6) = -1\cdot(x - 2)$ или $y = -x - 4$. *Ответ:* $y = -x - 4$. ▲

Пример 2. Выпишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-2x^2$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

△ Сначала найдём значение функции и её производной в точке $x_0=1$:

$$f(x_0)=f(1)=1^3-2\cdot1^2=-1, \qquad f'(x)=3x^2-4x, \qquad f'(1)=3\cdot1^2-4\cdot1=-1.$$

Подставив найденное в уравнение (1), получим уравнение искомой касательной:

$y-(-1)=-1(x-1)$ или $y=-x$. *Ответ:* $y=-x$. ▲

Ясно, что если касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 параллельна прямой $y=kx+b$, то $f'(x_0)=k$. Это условие позволяет найти уравнение касательной, параллельной заданной прямой.

Пример 3. Выпишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-3x+4$, параллельной прямой $y=2x-1$.

△ Из условия $f'(x_0)=2$ параллельности касательной заданной прямой получим уравнение $2x_0-3=2$. Из этого уравнения $x_0=2,5$. Значит, искомая касательная проходит через точку с абсциссой $x_0=2,5$. Отсюда:

$$f(x_0)=f(2,5)=2,5^2-3\cdot2,5+4=6,25-7,5+4=2,75$$

$$f'(x_0)=f(2,5)=2.$$

Теперь можно найти уравнение касательной:

$$y-2,75=2(x-2,5) \quad \text{или} \quad y=2x-2,25.$$

Ответ: $y=2x-2,25$. ▲

Пример 4. Выпишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-2x^2+3x-2$, проходящей через точку с абсциссой $x_0=4$. Найдите синус угла, образованного этой касательной с положительным направлением оси Ox.

△ Сначала найдём значение функции и её производной в точке $x_0=4$:

$$f(x_0)=f(4)=3\cdot4^3-2\cdot4^2+3\cdot4-2=170, \quad f'(x)=3x^2-4x+3,$$

$$f'(4)=3\cdot4^2-4\cdot4+3=35.$$

Подставив найденное в уравнение (1), получим уравнение искомой касательной:

$y-170=35(x-4)$ или $y=35x+30$.

Согласно геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\alpha=35$. Отсюда

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{35}{\sqrt{1+35^2}} = \frac{35}{\sqrt{1226}}.$$

Ответ: $y=35x+30$; $\sin\alpha = \frac{35}{\sqrt{1226}}$. ▲

Пример 5*. Докажите, что касательная к параболе $f(x)=x^2$, проведенная в точке A с абсциссой x_0, пересекает ось Ox в точке $\frac{1}{2}x_0$.

△ Имеем $f'(x)=2x$, $f(x_0)=x_0^2$, $f'(x_0)=2x_0$.

Воспользуемся (1): $y=2x_0 \cdot x-x_0^2$. Ясно, что данная прямая пересекает ось Ox в точке $\left(\frac{x_0}{2};0\right)$. ▲

Отсюда следует правило построения касательной к параболе $f(x)=x^2$. Именно, эта касательная проходит через точку A с абсциссой x_0 и точку $\left(\frac{x_0}{2};0\right)$.

Уравнение нормали. Пусть задана касательная к графику функции $y=f(x)$, проведённая к точке с абсциссой $x=x_0$. Прямая

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \qquad (2)$$

проходящая через точку с абсциссой $x=x_0$ перпендикулярно этой касательной, называется *нормалью* к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рисунок 19).

Пример. Составить уравнение нормали к графику функции $f(x)=x^5$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

△ Найдём производную: $f'(x)=5x^4$. Вычислим значение функции и её производной в точке $x_0=1$:

$f(1)=1^5=1$ и $f'(1)=5\cdot 1^4=5$. Подставив эти значения в уравнение нормали, получим $y-1=-\frac{1}{5}(x-1)$ или $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$.

Ответ: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$. ▲

Примечание: Касательная к графику функции $f(x)=x^5$, в точке с абсциссой $x_0=1$ имеет уравнение $y=5x-4$ (докажите!). Обратите внимание, что для произведения угловых коэффициентов касательной и нормали справедливо равенство $5\cdot(-\frac{1}{5})=-1$.

? Вопросы и задания

1. Выпишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, проходящей через точку с абсциссой x_0.
2. Выпишите уравнение нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.
3. Как находится касательная, параллельная заданной прямой? Объясните на примере.

Упражнения

45. Выпишите уравнение касательной к графику функции, проходящей через точку с абсциссой $x_0=1$; $x_0=-2$; $x_0=0$:

1) $f(x)=2x^2-5x+1$; 2) $f(x)=3x-4$; 3) $f(x)=6$;
4) $f(x)=x^3-4x$; 5) $f(x)=e^x$; 6) $f(x)=2^x$;
7) $f(x)=2^x+\ln 2$; 8) $f(x)=\sin x$; 9) $f(x)=\cos x$;
10) $f(x)=\cos x-\sin x$; 11) $f(x)=e^x x$; 12) $f(x)=x\cdot\sin x$.

46. Выпишите уравнение касательной к графику функции, параллельной прямой $y=7x-1$:

1) $f(x)=x^3-2x^2+6$; 2) $f(x)=4x^2-5x+3$; 3) $f(x)=8x-4$.

47. Найдите точки такие, что соответствующие касательные к графикам функций $f(x)$ и $g(x)$ будут параллельны:

1) $f(x)=3x^2-5x+4$, $g(x)=4x-5$;
2) $f(x)=8x+9$, $g(x)=-5x+8$;
3) $f(x)=7x+11$, $g(x)=7x-9$;
4) $f(x)=x^3-8$, $g(x)=x^2+5$;
5) $f(x)=x^3+x^2$, $g(x)=5x-7$;
6) $f(x)=x^4+11$, $g(x)=x^3+10$.

48. Выпишите уравнение нормали к графику функции в точке с абсциссой а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = 0$:

1) $f(x)=3x^2-5x+1$; 2) $f(x)=3x-40$; 3) $f(x)=7$;
4) $f(x)=x^3-10x$; 5) $f(x)=e^x$; 6) $f(x)=12^x$;
7) $f(x)=\sin x$; 8) $f(x)=\cos x$; 9) $f(x)=\cos x - \sin x$;
10) $f(x)=e^{\pi x}$; 11) $f(x)=x\cdot\cos x$; 12) $f(x)=x\cdot\sin x$.

Типовое задание для контроля

Вариант I

1) Найдите отношение приращения функции $f(x)=x^3+2x^2-5x+3$ в точке $x_0=2$, к приращению аргумента $\Delta x=0,1$.

2) Найдите производную функции $f(x)=-8x^2+4x+1$ в точке $x_0=-3$.

3) Выпишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=$ $=x^3-7x^2+8x-5$, проходящей через точку с абсциссой $x_0=-4$.

4) Материальная точка движется по прямой согласно закону движения $s(t)=8t^2-5t+6$. Пусть t измеряется в секундах, а s – в метрах. Найдите мгновенную скорость точки в момент времени $t_0=8$.

5) Найдите производную произведения: $(3x^2-5x+4)\cdot e^x$.

6) Найдите производную отношения: $\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}$.

7) Найдите производную сложной функции: $\mathrm{ctg}^{15}x$.

Вариант II

1) Найдите производную отношения: $\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}$.

2) Найдите производную сложной функции: $\mathrm{ctg}^{15}x$.

3) Вычислите значение производной функции $f(x)=l_n(x+1)$ в точке $x_0 = \dfrac{1}{16}$.

4) Выпишите уравнение касательной функции $f(x)=l_n(x+1)$ в точке с абсциссой $x < 0$.

5) Найдите мгновенную скорость в момент времени $t=16$ сек. материальной точки, движущейся по прямой по закону $s(t)=0,5\ t^2-5t+1$. Здесь t измеряется в секундах, s – в метрах.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

49. Пусть задана функция $y=f(x)$. Найдите для x_0 и x соответствующие значения h и Δy:

1) $f(x)=4x^2-3x+2$, $x_0=1$, $x=1{,}01$; 2) $f(x)=(x+1)^3$, $x_0=0$, $x=0{,}1$.

50. Пусть $x_0 = 3$ и $\Delta x = 0{,}03$. Для заданных функций найдите: а) приращение функции; б) отношение приращения функции к приращению аргумента:

1) $f(x)=7x-5$; | 2) $f(x)=2x^2-3x$; | 3) $f(x)=x^3+2$; | 4) $f(x)=x^3+4x$.

51. Пусть $x_0=2$ и $\Delta x=0{,}01$. Для заданных функций найдите: а) приращение функции; б) отношение приращения функции к приращению аргумента:

1) $f(x)=-4x+3$; | 2) $f(x)=-8$; | 3) $f(x)=x^2+10x$; | 4) $f(x)=x^3-10$.

52. К чему стремится функция при $x\to 0$:

1) $f(x)=x^3-2x^2+3x+4$; 2) $f(x)=x^5-6x^4+8x-7$;

3) $f(x)=(x^2-5x+1)(x^3-7x^2-11x+6)$;

4) $f(x)=\dfrac{x^2-x-19}{x^2+7x-28}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^3-8x}{x^3+x^2+x+1}$?

53. Найдите производную функции:

1) $y=17x$; 2) $y=29x-3$; 3) $y=-15$; 4) $y=16x^2-3x$;

5) $y=-5x+40$; 6) $y=18x-x^2$; 7) $y=x^2+15x$;

8) $y=16x^3+5x^2-2x+14$; 9) $y=3x^3+2x^2+x$.

54. Вычислить значение производной в точке: а) $x = -3$; б) $x = 1{,}1$; в) $x = 0{,}4$; г) $x = -0{,}2$:

1) $y=15x$; | 2) $y=9x+3$; | 3) $y=-20$; | 4) $y=5x^2+x$;

5) $y=-8x+4$; | 6) $y=8x-x^2$; | 7) $y=x^2+25x$; | 8) $y=x^3+5x^2-2x+4$.

55. Найдите производную функции $y=f(x)$, используя определение:

1) $f(x)=2x^2+3x+5$; 3*) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$;

2) $f(x)=(x+2)^3$; 4*) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

56. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$, $x_0=1$;
2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\sin 22°$, $x_0=-1$;
3) $f(x)=(2x+1)(\sqrt{x}-1)$, $x_0=4$;
4) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1}$, $x_0=-3$.

57. Материальная точка движется по прямой, согласно закону движения $s(t)=\frac{4}{3}t^3-t+5$. Пусть t измеряется в секундах, а s – в метрах. Найдите мгновенную скорость точки в момент времени $t_0=2$.

58. Найдите производную функции:

1) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}$;
2) $y=\sqrt[3]{x}+2x^3$;
3*) $y=\sqrt[5]{x}+x\cdot \mathrm{tg}x-\log_3 x$;
4) $y=(2x+3)^3$;
5*) $y=x\cdot \ln x\cdot (x+1)$;
6) $y=(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)$;
7) $y=\frac{x+2}{\sin x}$;
8) $y=10^x+\log_2 5+\cos 15°$;
9) $y=3^{-x}\cdot \sin x$;
10*) $y=\mathrm{tg}x\cdot \cos x+7^x\cdot x^7$;
11) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-8x^2+3$;
12) $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sin x+5$;
13) $f(x)=x^{10}-80x$;
14) $f(x)=8x-\frac{2^x}{\ln 2}$.

59. Найдите значение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$, $x_0=0$;
2) $f(x)=(x^2+3x)\ln x$, $x_0=1$;
3) $f(x)=\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}$, $x_0=1$;
4) $f(x)=e^x(x-\ln 2)$, $x_0=\ln 2$.

60*. Решите неравенство $f'(x)>0$:

1) $f(x)=x\cdot \ln 27-3^x$;
2) $f(x)=\sin x-2x$.

61. Материальная точка движется по прямой согласно закону движения $s(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t$. В какой момент времени мгновенная скорость точки будет равна нулю? Объясните смысл этого явления.

62. Найдите производную: 1) $y = x^5 - x^4 + x$; 2) $y = \frac{1}{x^2} - x$; 3) $y = x^4 + \sqrt[5]{x}$.

63. Найдите скорость материальной точки в момент времени t_0:

1) $x(t) = t^4 - 2t^3 + t$, $t_0 = -5$; 2) $x(t) = -5t + t^2 - \sqrt{t}$, $t_0 = 4$.

Найдите производную (**64–66**):

64. 1) $y = (x+2)(x^2-5x)$; 2) $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 8}$; 3) $y = (x^4 + \sqrt{x})(x^3 - 5x)$;

4) $y = 2x^3+4x^2+5x$; 5) $y = \frac{14}{x} - \frac{x}{14}$; 6) $y = 7x^2 + 12x + \sqrt{2019}$.

65*. 1) $y = \frac{x^8}{x^{10} - 1}$; 2) $y = \frac{x^3 + x + 1}{x^5 + 7}$; 3) $y = (x^{10} + x^{-10})(x^8 + x^{-8})$.

66*. 1) $y = \frac{3^x \cdot \sin x}{\cos x}$; 2) $y = e^{5x}(\cos x - \sin x)$;

3) $y = x\operatorname{ctg}x$; 4) $y = \frac{\ln x}{x^2}$.

67*. Найдите значение производной в точке x_0:

1) $f(x) = \frac{5x+1}{13x-5}$, $x_0 = -2$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg}x - 2x + 2$, $x_0 = \frac{-\pi}{4}$;

3) $f(x) = x^2(\lg x - 1)$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = \operatorname{ctg}x - \frac{1}{20}\ln x$, $x_0 = 1$.

68*. Найдите производную сложной функции:

1) $x^2 \cdot \sin x$; 2) $\log_{15}\cos x$; 3) $\ln\operatorname{ctg}x$;

4) $\operatorname{tg}^{35}x$; 5) $e^{\operatorname{ctg}x}$; 6) $23^{\cos x}$;

7) $35^{\sin x}$; 8) $(x^2-10x+7)\ln\cos x$;

9) $\frac{x^5 - 6x + 4}{e^x}$; 10) $e^{-3x}(x^4-3x^2+2)$; 11) $\ln\operatorname{tg}x$;

12) $\frac{x^3 + 7x + 1}{e^{2x}}$; 13) $e^{5x}(x^5+8x+11)$; 14) $\ln\cos 2x$.

18–21 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЁ ГРАФИКА

Возрастание и убывание функции. Мы знакомы с возрастающими и убывающими функциями. Далее мы будем использовать производную для нахождения промежутков возрастания и убывания функции.

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена и имеет производную на интервале $(a;\ b)$. Если для всех $x \in (a; b)$ выполнено неравенство $f'(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(a;\ b)$ (рисунок 20).

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена и имеет производную на интервале $(a;\ b)$. Если для всех $x \in (a; b)$ выполнено неравенство $f'(x) < 0$, то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $(a; b)$ (рисунок 21).

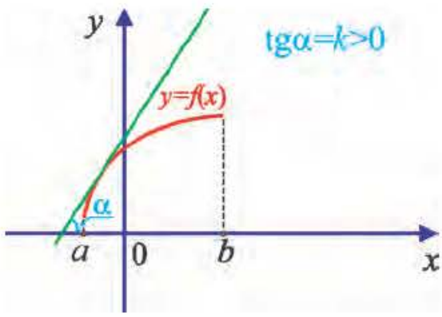


Рисунок 20.

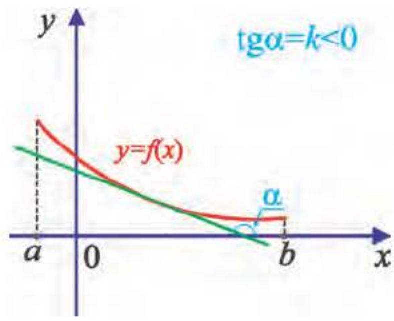


Рисунок 21.

Теоремы 1, 2 примем без доказательства.

Пример 1. Найдите промежутки убывания и возрастания функции:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3.$$

△ Эта функция определена на интервале $(-\infty; +\infty)$. Найдём производную. Решая неравенства $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$. $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ методом интервалов найдём, что функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(2; +\infty)$, а на интервале $(-1; 2)$ – убывает.

Ответ: На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(2; +\infty)$ функция возрастает, а на интервале $(-1; 2)$ функция убывает. ▲

Пример 2. Найдите промежутки убывания и возрастания функции: $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

△ Эта функция определена на интервале $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Найдём производную: $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$. Решая неравенство $f'(x) > 0$, то есть неравенство $1-\frac{1}{x^2}>0$ методом интервалов, получим, что на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция возрастает. Точно также, решая неравенство $f'(x)<0$, то есть неравенство $1-\frac{1}{x^2}<0$, получим, что функция убывает на промежутках $(-1; 0)$ и $(0; 1)$.

Ответ: Функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$; функция убывает на промежутках $(-1; 0)$ и $(0; 1)$. ▲

Стационарные (критические) точки функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$.

Определение 1. Точки, в которой производная функции $y = f(x)$ обращается в 0, называются *стационарными* или *критическими*.

Пример 3. Найдите стационарные точки функции: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$

△ Найдём производную функции $f(x)$ и приравняем её к нулю: $f'(x) = 6x^2- 6x - 12 = 0$.

Решая полученное уравнение, заключаем, что точки $x_1= -1$, $x_2=2$ – стационарные.

Ответ: $x_1= -1, x_2= 2$. ▲

Локальные максимумы и минимумы функции. Для нахождения локальных максимумов и минимумов можно воспользоваться понятием производной.

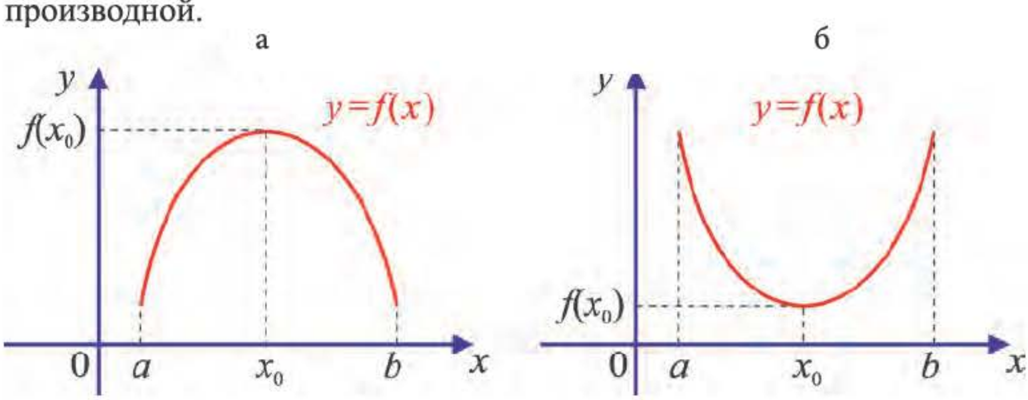


Рисунок 22.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ определена и имеет производную на интервале $(a; b)$. Пусть для некоторой точки $x_0\in(a; b)$ на интервале

$(a;x_0)$ выполнено неравенство $f'(x) > 0$, а на интервале $(x_0; b)$ $f'(x) < 0$. Тогда точка x_0 является точкой локального максимума функции $f(x)$.

Теорема 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена и имеет производную на интервале $(a; b)$. Пусть для некоторой точки $x_0 \in (a, b)$ на интервале $(a;x_0)$ $f'(x) < 0$, а на интервале $(x_0;b)$ $f(x) > 0$ (здесь $x_0 \in (a, b)$). Тогда x_0 является точкой локального минимума функции $f(x)$.

Теоремы 3, 4 примем без доказательства.

Определение 2. Точки локального максимума и минимума называются точками *локального экстремума*.

Пример 4. Найдите точки локального экстремума функции $f(x) = x^3 - 3x + 3$.

Δ Найдём производную функции: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Производная определена всюду и обращается в нуль в точках $x = \pm 1$. Поэтому точки $x = \pm 1$ являются стационарными (критическими). Воспользовавшись методом интервалов, определим, что на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ $f'(x) > 0$, а на промежутке $(-1;1)$ $f'(x) < 0$. Значит $x = -1$ – точка локального максимума, а точка $x = 1$ – точка локального минимума (рисунок 23).

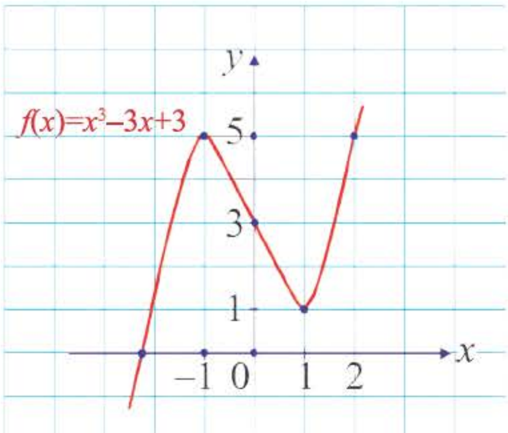


Рисунок 23.

Ответ: $x = -1$ – точка локального максимума, а точка $x = 1$ – точка локального минимума. ▲

Наибольшее и наименьшее значения функции. С этими понятиями мы познакомились в 10 классе.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и имеет производную на интервале $(a; b)$. Сформулируем алгоритм нахождения его наибольшего и наименьшего значений:

1) Находим все стационарные точки;

2) Вычисляются значения функции в найденных стационарных точках и на на граничных точках a и b;

3) Наибольшее среди найденных в предыдущем пункте значений и будет наибольшим значением функции на отрезке $[a; b]$.

Наименьшее значение функции на отрезке $[a; b]$ находится аналогично.

Пример 5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 4,5x^2 - 9$ на отрезке $[-4; 2]$. Найдём производную функции: $f'(x) = 3x^2 + 9x$. Приравняв производную к нулю, найдём стационарные точки: $f'(x) = 3x(x+3) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -3$.

Вычислим значения функции в найденных стационарных точках $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ и на граничных точках $a = -4$, $b = 2$:

$f(0) = 0^3 + 4,5 \cdot 0^2 - 9 = -9$, $\quad f(-3) = (3)^3 + 4,5 \cdot (-3)^2 - 9 = 4,5$,

$f(-4) = (-4)^3 + 4,5 \cdot 4^2 - 9 = -1$, $\quad f(2) = 2^3 + 4,5 \cdot 2^2 - 9 = 17$.

Значит, наибольшее значение функции равно 17, а наименьшее значение равно – 9.

Ответ: наибольшее значение функции равно 17, а наименьшее значение равно – 9. ▲

Исследование и построение графика функции с помощью производной. Для этого будем придерживаться следующей последовательности действий:

1. находится область определения;
2. находятся стационарные точки;
3. определяются промежутки убывания и возрастания;
4. находятся точки локального максимума и локального минимума, а также значения функции в этих точках;
5. на основании полученной информации строится эскиз графика.

При построении графика полезно находить точки пересечения графика функции с осями координат, а также некоторые другие точки.

Пример 6. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x$ с помощью производной и постройте график.

1. Функция определена на $(-\infty; +\infty)$.

2. Найдём стационарные точки:

$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 0$. $x_1 = 1$ и точки $x_2 = -1$ стационарные.

3. Найдём промежутки убывания и возрастания.

Так как на интервалах $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ $f'(x) > 0$, то функция возрастает на этих интервалах. Далее, так как на интервале $(-1; 1)$ $f'(x) < 0$, то функция убывает на этом интервале.

4. Точка $x=-1$ – точка локального максимума. Вычислим значение функции в этой точке: $f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)=2$. Аналогично, точка $x=1$ – точка локального минимума. Найдём значение функции в этой точке $f(1)=1^3-3\cdot 1=-2$.

5. Найдём точки пересечения графика функции с осью Ox:

$x^3-3x=x(x^2-3)=0$. Отсюда получим $x=0$ или $x^2-3=0$. Решая последнее уравнение, заключаем, что точки $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$ являются абсциссами точек пересечения графика функции с осью Ox.

В результате получим схематический вид графика (рисунок 24).

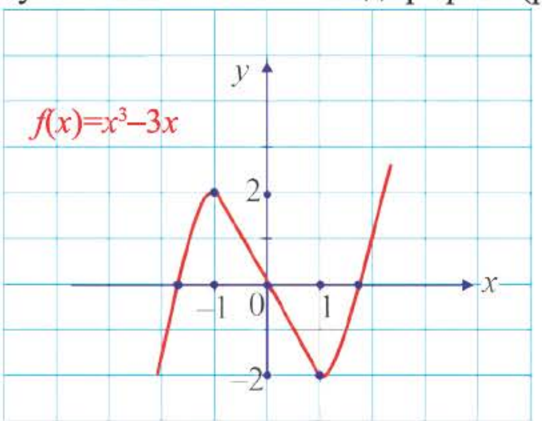


Рисунок 24.

Вопросы и задания

1. Как можно найти промежутки возрастания и убывания функции?
2. Дайте определение стационарной точки функции.
3. Как можно найти точки локального максимума и локального минимума функции?
4. Как можно найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке?
5. Приведите схему построения графика функции для конкретного примера.
6. Обязательно ли стационарная точка функции является также точкой экстремума? Приведите примеры.
7. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$ и постройте её график.

Упражнения

69. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x)=2-9x$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}x-8$; 3) $f(x)=x^3-27x$;

4) $f(x)=\frac{x-1}{x}$; 5) $f(x)=x^2-2x+4$; 6) $f(x)=x(x^2-6)$;

7) $f(x)=-x^2+2x-3$; 8) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; 9) $f(x)=x^4-2x^2$;

10) $f(x)=3x^4-8x^3+16$; 11) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; 12) $f(x)=\sin x$;

13) $f(x)=\cos x$; 14) $f(x)=\operatorname{tg} x$; 15*) $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$.

70. Найдите стационарные точки функции:

1) $f(x)=2x^2-3x+1$; 2) $f(x)=9x-\frac{1}{3}x^3$; 3*) $f(x)=|x-1|$;

4) $f(x)=x^2$; 5) $f(x)=8x^3+5x$; 6) $f(x)=3x-4$;

7*) $f(x)=|x|+1$; 8) $f(x)=2x^3+3x^2-6$; 9) $f(x)=3+8x^2-x^4$.

71. Найдите точки локального максимума и локального минимума функции:

1) $f(x)=x^2-\frac{1}{2}x^4$; 2) $f(x)=(x-4)^8$; 3) $f(x)=4-3x^2-2x^3$;

4) $f(x)=\frac{5}{x}+\frac{x}{5}$; 5) $f(x)=x^4-2x^3+x^2-3$; 6) $f(x)=3\operatorname{tg} x$;

7) $f(x) = 2\sin x + 3$; 8) $f(x) = -5\cos x-7$; 9) $f(x)=x^4-x^3+4$.

72. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x)=x^3-27x$; 2*) $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$; 3*) $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$;

4) $f(x)=5\sin x+13$; 5) $f(x)=15\cos x-7$; 6) $f(x)=-3\operatorname{tg} x$.

73. Наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

1) $f(x)=x^4-8x^2+3$, $x\in[-4; 1]$; 2) $f(x)=3x^5-5x^3+1$, $x\in[-2; 2]$;

3) $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $x\in[1; 2]$; 4) $f(x)=3x^3-6x^2-5x+8$, $x\in[-1; 4]$.

74. Исследуйте функцию и постройте её график:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2;$ | 2) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1;$ | 3) $y = x^4 - 4x^3 + 15$.

75*. Используя графики производной функции (рисунок 24, 25), найдите:

1) стационарные точки;
2) промежутки возрастания;
3) промежутки убывания;
4) точки локального максимума;
5) точки локального минимума.

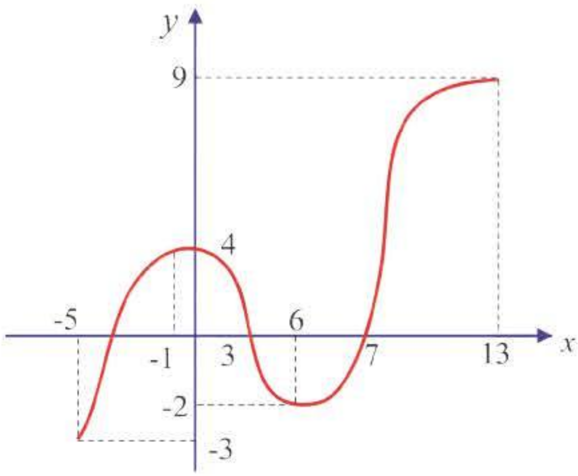


Рисунок 25.

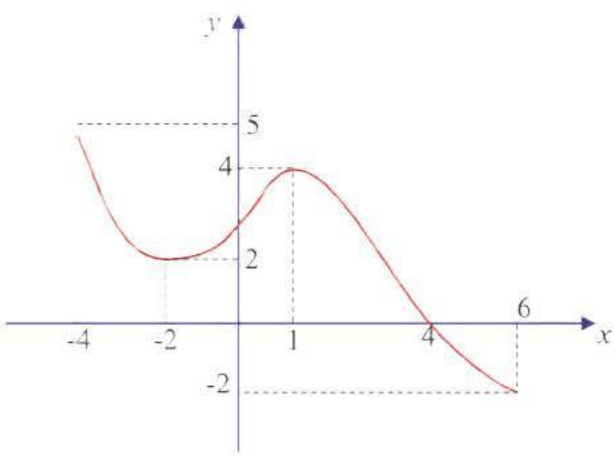


Рисунок 26.

Типовая контрольная работа
Вариант I

1. Найдите производную: $f(x) = 20x^3 + 6x^2 - 7x + 3$.

2. Пусть $f(x) = x^2 - 5x + 4$ и $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Найдите $f(g(3))$.

3. Пусть $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 1$. Найдите:

1) стационарные точки;
2) промежутки возрастания;
3) промежутки убывания;
4) точки локального максимума;
5) точки локального минимума.

4. Найдите производную: $(3x + 5)^3 + \sin^2 x$.

5. Пусть $f(x) = \sqrt{1-3x}$. Вычислите $f'\left(\frac{1}{4}\right)$

Вариант II

1. Найдите производную: $f(x) = 10x^3 + 16x^2 + 7x - 3$.

2. Пусть $f(x) = x^2 + 6x - 3$ и $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$ Найдите $f(g(3))$.

3. Пусть $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$. Найдите:

1) стационарные точки;
2) промежутки возрастания;
3) промежутки убывания;
4) точки локального максимума;
5) точки локального минимума.

4. Найдите производную: $(2x - 6)^3 + \cos^2 x$.

5. Пусть $f(x) = \sqrt{1-2x}$. Вычислите $f'\left(\frac{3}{8}\right)$

22–25 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ, ФИЗИЧЕСКИМ И ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Задачи с геометрическим содержанием

Задача 1. Найдите наибольшую площадь земельного участка прямоугольной формы, который можно огородить забором длиной 100 метров.

∆ Пусть длина и высота прямоугольника равны *x м* и *y м* соответственно (рисунок 27).

Периметр прямоугольника равен $2x+2y=100$. Отсюда $y=50-x$. Найдём площадь этого прямоугольника $S(x)=xy=x(50-x)=50x-x^2$.

Рисунок 27.

Требуется найти x такое, что функция $S(x)$ достигает своего максимума.

Найдём стационарные точки функции

$S(x)$: $S'(x)=50-2x=0$, отсюда $x=25$.

Так как на промежутке $(-\infty;\ 25)$ $S'(x)>0$, а на промежутке $(25; +\infty)$ $S'(x)<0$, то функция $S(x)$ достигает своего максимума в точке $x=25$, причём $S(25)=625$. Значит, наибольшая площадь земельного участка прямоугольной формы, который можно огородить забором длиной 100 метров, равна 625 м^2.

Ответ: 625 м^2. ▲

Вообще говоря, среди прямоугольников с заданным периметром, наибольшую площадь имеет квадрат.

Задача 2. Из картона формы квадрата со стороной *a* см необходимо изготовить коробку без верха. Для этого отрезают одинаковые меньшие квадратные уголки. В каком случае мы можем получить коробку наибольшей вместимости?

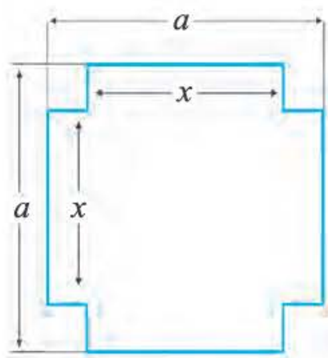


Рисунок 28.

△ Пусть x см – сторона основания получившейся коробки (рисунок 28).

Сторона отрезанного квадратного уголка равна $\frac{a-x}{2}$. Объём получившейся коробки равен $V(x)=\frac{a-x}{2}\cdot x\cdot x=-\frac{x^3}{2}+\frac{ax^2}{2}$ см^3. Значит, задача свелась к нахождению наибольшего значения функции $V(x)=-\frac{x^3}{2}+\frac{ax^2}{2}$ на отрезке $[0;\ a]$. Найдём стационарные точки функции $V(x)$: $V'(x)=-\frac{3}{2}x^2+ax=0$.

В итоге получим, что $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}a$ – стационарные точки. Ясно, что $V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{2}{27}a^3$ и $V\left(\frac{2}{3}a\right)>V(0)=V(a)=0$. Таким образом, наибольшее значение $V(x)$ на $[0;\ a]$ равно $\frac{2}{27}a^3$.

Ответ: коробка с длиной стороны основания $x=\frac{2}{3}a$ см. ▲

Задачи с физическим содержанием

Задача 3. Материальная точка движется по прямой согласно закону движения $s(t)=-\frac{t^4}{12}+t^3$ Пусть t измеряется в секундах, а s – в метрах. Найдите:

1) Момент времени t_0, при котором ускорение максимально;
2) Мгновенную скорость в момент времени t_0;
3) Путь, пройденный за время t_0.

△ Найдём скорость материальной точки:

$$v(t)=s'(t)=\left(-\frac{t^4}{12}+t^3\right)'=-\frac{t^3}{3}+3t^2.$$

Из курса физики известно, что производная скорости равна ускорению, т.е: $a(t)=v'(t)=-t^2+6t$.

1) Найдём момент времени t_0, при котором ускорение максимально. Решим уравнение $a(t)=v'(t)=-t^2+6t$. Так как на интервале $(0;\ 3)$ $a'(t)>0$, а на интервале $(3;+\infty)$ $a'(t)<0$, то заключаем, что в момент времени $t_0=3$ функция $a(t)$ достигает своего максимума.

2) Вычислим мгновенную скорость в момент времени t_0:
$v(3)=-\frac{3^3}{3}+3\cdot 3^2=18\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

3) Для нахождения пути, пройденного за время t_0, подставим выражение $s(t)=-\frac{t^4}{12}+t^3$ t_0=3: $s(3)=-\frac{3^4}{12}+3^3=-\frac{27}{4}+27=\frac{81}{4}=20,25$ м.

Ответ: 1) 3 с; 2) $18\frac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) 20,25 м. ▲

Задача 4. Материальная точка движется по прямой согласно закону движения $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50$ Пусть t измеряется в секундах, а s – в метрах. Найдите:

1) Момент времени t_0, при котором скорость минимальна;
2) Ускорение в момент времени t_0;
3) Путь, пройденный за время t_0.

△ Найдём скорость и ускорение материальной точки:

$$v(t)=s'(t)=\left(\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50\right)'=t^2-2t+4,$$

$$a(t)=v'(t)=\left(t^2-2t+4\right)'=2t-2.$$

1) Найдём момент времени t_0, при котором скорость минимальна:

$$v'(t)=(t^2-2t+4)'=2t-2=0, \text{ отсюда } t_0=1.$$

Так как на интервале (0; 1) $v'(t)<0$, а на интервале $(1;+\infty)$ $v'(t)>0$, то в момент времени $t_0=1$ $v(t)$ достигает своего минимума.

2) Вычислим ускорение при t_0: $a(1)=2\cdot1-2=0$ м/с^2.

3) Для нахождения пути, пройденного за время t_0,

подставим в выражение $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50$ значение t_0=1:

$s(1)=\frac{1^3}{3}-1^2+4\cdot1+50=53\frac{1}{3}$ м.

Ответ: 1) 1 с; 2) 0 м/с^2; 3) $53\frac{1}{3}$ м. ▲

Задача 5. В течение времени $t\in[0;8]$ минут в воздушный шар подаётся воздух объёма $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2$ (м^3). Найдите:

1) Объём воздуха, подаваемый в начале;
2) Объём воздуха, подаваемый в момент времени $t=8$ мин;
3) Скорость подачи воздуха в момент времени $t=4$ мин.

△ 1) Для того, чтобы найти объём воздуха, подаваемый в начале, подставим в формулу $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2$ м^3 значение $t=0$, то есть $V(0)=2$ м^3.

2) Объём воздуха, подаваемый в момент времени $t = 8$ мин подставим в формулу $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2$ м^3 значение $t=8$, то есть:

$$V(8) = 2\cdot 8^3-3\cdot 8^2+10\cdot 8+2 = 1024-192+80+2 = 914 \text{ м}^3;$$

3) Найдём скорость подачи воздуха:

$$v'(t)=\left(2t^3-3t^2+10t+2\right)'=6t^2-6t+10\left(\frac{\text{м}^3}{\text{мин}}\right).$$

Значит, $v'(4)=6\cdot 4^2-6\cdot 4+10=96-24+10=82\left(\frac{\text{м}^3}{\text{мин}}\right)$.

Значит, $a(3)=12\cdot 3-6=30\left(\frac{\text{м}^3}{\text{мин}^2}\right)$.

Ответ: 1) 2 м^3; 2) 914 м^3; 3) $82\frac{\text{м}^3}{\text{мин}}$ ▲

Задача экономического содержания

Задача 6. Карима получила заказ на пошив платьев. Пусть она шьёт в течение месяца x платьев, получая при этом доход $p(x)= -x^2+l00x$ тыс. сум. Найдите:

1) Сколько платьев должно быть сшито, чтобы получить наибольший доход?

2) Чему равен этот наибольший доход?

△ 1) Найдём макисмум функции $p(x)= -x^2+100x$:

$p'(x)=(-x^2+100x)'=-2x+100=0$, отсюда $x_0=50$. Так как на интервале $(0; 50)$ $p'(x)>0$, *а* на интервале $(50; +\infty)$ $p'(x)<0$, то функция достигает своего максимума при $x_0=50$. Значит, для получения наибольшего дохода необходимо сшить 50 платьев.

3) Для нахождения наибольшего дохода подставим значение $x_0=50$ в выражение $p(x)=-x^2+100x$:

$p(50)=-50^2+100\cdot 50=-2500+5000=2500$ (тыс. сум)$=2500000$ сум.

Ответ: 1) 50 платьев; 2) 2 500 000 сум. ▲

? Вопросы и задания

Приведите пример задачи с

1) геометрическим; 2) физическим; 3) экономическим содержанием.

Задания

76. Найдите наибольшую площадь земельного участка прямоугольной формы, который можно огородить забором длиной 300 метров?

77. Найдите наибольшую площадь земельного участка прямоугольной формы, который можно огородить забором длиной 480 метров?

78.* Из картона формы квадрата со стороной 120 см необходимо изготовить коробку без верха. Для этого отрезают одинаковые квадратные уголки. В каком случае мы можем получить коробку наибольшей вместимости?

79.* Консервная банка цилиндрической формы имеет полную поверхность площади 216 π см^2. При каких радиусе основания и высоте достигается наибольшая вместимость?

80. Найдите наменьшую длину забора, которым можно огородить земельный участок прямоугольной формы площади 6400 м^2?

81.* Найдите высоту конуса наименьшего объёма, вписанного в шар радиуса 5м.

82.* Планируется изготовить металлическую ёмкость в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и вместимостью 13,5 *l*. Найдите его измерения при условии, что затраты металла на его изготовление должны быть минимальными?

83. Материальная точка движется по прямой согласно закону движения $s(t) = -\frac{t^4}{4} + 5t^3$. Пусть t измеряется в секундах, а s – в метрах. Найдите:

1) Момент времени t_0, при котором ускорение максимально;
2) Мгновенную скорость в момент времени t_0;
3) Путь, пройденный за время t_0.

84. Материальная точка $s(t) = -\frac{t^4}{2} + 12t^3$ движется по прямой согласно закону движения $s(t) = -\frac{t^4}{4} + 5t^3$. Пусть t измеряется в секундах, а $s(t)$ – в метрах. Найдите:

1) Момент времени t_0, при котором ускорение максимально;
2) Мгновенную скорость в момент времени t_0;
3) Путь, пройденный за время t_0.

85. Материальная точка движется по прямой согласно закону движения $s(t)=\frac{t^3}{9}-2t^2+40t+50$. Пусть t измеряется в секундах, а s – в метрах. Найдите:

1) Момент времени t_0, при котором ускорение максимально;

2) Мгновенную скорость в момент времени t_0;

3) Путь, пройденный за время t_0

86. Материальная точка движется по прямой согласно закону движения $s(t)=\frac{t^3}{2}-3t^2+8t+5$. Пусть t измеряется в секундах, а s – в метрах. Найдите:

1) Момент времени t_0, при котором ускорение максимально;

2) Мгновенную скорость в момент времени t_0;

3) Путь, пройденный за время t_0.

87. В течение времени $t \in [0;\ 10]$ минут в воздушный шар подаётся воздух объёма $V(t)=5t^3+3t^2+2t+4$ (м^3). Найдите:

1) Объём воздуха, подаваемый в начале;

2) Объём воздуха, подаваемый в момент времени $t=10$ мин;

3) Скорость подачи воздуха в момент времени $t=5$ мин.

88. В течение времени $t \in [0;\ 15]$ минут в воздушный шар подается воздух объёма $V(t)=t^3+13t^2+t+20$ (м^3) Найдите:

1) Объём воздуха, подаваемый в начале;

2) Объём воздуха, подаваемый в момент времени $t = 15$ мин;

3) Скорость подачи воздуха в момент времени $t = 10$ мин.

89. Муслима получила заказ на пошив мужских брюк. Пусть она шьёт в течение месяца x брюк, получая при этом доход $p(x)=-2x^2+120x$ тыс. сум. Найдите:

1) Сколько брюк должно быть сшито, чтобы получить наибольший доход?

2) Чему равен этот наибольший доход?

90. Муслима получила заказ на пошив женских юбок. Пусть она шьёт в течение месяца x юбок, получая при этом доход $p(x)=-3x^2+96x$ тыс. сум. Найдите:

1) Сколько юбок должно быть сшито, чтобы получить наибольший доход?

2) Чему равен этот наибольший доход?

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 ограниченную производную $f'(x_0)$.

Мы знаем, что уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Заметим, что график функции $y=f(x)$ вблизи x_0 можно приближенно заменить соответствующим отрезком касательной (рисунок 29):

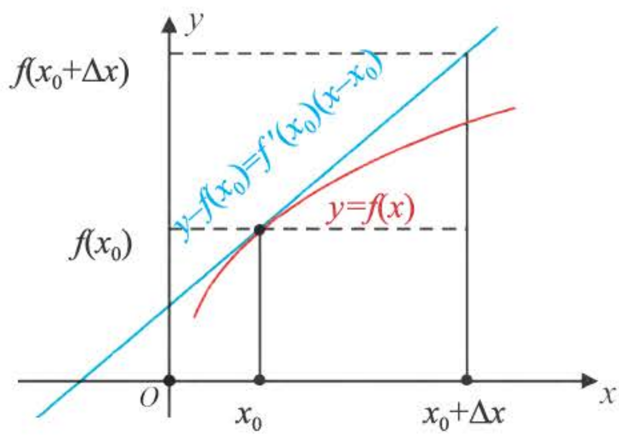


Рисунок 29.

Обозначив приращение $x-x_0$ через Δx (то есть $x=x_0+\Delta x$), получим следующее приближенное равенство:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \text{ или}$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (1)$$

Приближенную формулу (1) будем называть формулой *малых приращений*.

Замечание. Рекомендуем выбирать x_0 так, чтобы значения $f(x_0), f'(x_0)$ вычислялись непосредственно. Отметим также, что при лучшем приближении точки x к точке x_0, формула (1) даёт более точный результат.

Далее мы будем применять формулу малых приращений к приближенным вычислениям.

Пример 1. Найдите приближенное значение функции $f(x)=x^7-2x^6+3x^2-x+3$ в точке $x=2{,}02$.

Δ Выберем близкую к точке x=2,02 точку x_o=2. Значение функции в этой точке вычисляется без затруднений: $f(x_0)=f(2)=13$.
Найдём производную функции: $f'(x) = 7x^6 - 12x^5 + 6x - 1$.
Имеем

$f'(x_0)=f'(2)=75$, $\Delta x=x-x_0=2{,}02-2=0{,}02$.
Значит, по формуле (1) $f(2{,}02)=f(2+0{,}02)\approx 13+75\cdot 0{,}02=14{,}5$.
С помощью калькулятора или иного вычислительного устройства можно получить значение $f(2{,}02)\approx 14{,}57995...$ ▲

Пример 2. Найдите приближенное значение корня $\sqrt{1{,}02}$. Найдём ее производную.

△ Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x}$:

$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Найдите производную.

Положим $x_0 = 1$. Тогда получим $f(x_0)=f(1)=\sqrt{1}=1$,

$f'(x_0)=f'(1)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$, $\Delta x=x-x_0=1{,}02-1=0{,}02$.

Из формулы (1):

$$\sqrt{1{,}02}=\sqrt{1+0{,}02}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=1{,}01.$$

С помощью калькулятора или иного вычислительного устройства можно получить значение $\sqrt{1{,}02}\approx 1{,}0099504938....$ ▲

Пример 3. Найдите приближенное значение $\sqrt[3]{7.997}$.

Δ Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Найдём её производную:

$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.

Положим $x_0=8$. Тогда получим $f(x_0)=f(8)=\sqrt[3]{8}=2$,

$f'(x_0)=f'(8)=\dfrac{1}{3}8^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\dfrac{1}{12}$,

$\Delta x=7{,}997-8=-0{,}003$.
Тогда из формулы (1) получим

$$\sqrt[3]{7{,}997}=\sqrt[3]{8+(-0{,}003)}\approx 2-\frac{0{,}003}{12}=1{,}9997.$$

С помощью калькулятора или иного вычислительного устройства можно получить значение $\sqrt[3]{7.997} \approx 1,9997499687....$ ▲

Пример 4. Найдите приближенное значение sin 29°.

△ Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Найдём её производную: $f'(x) = \cos x$.

положим $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $f(x_0) = f(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

$f'(x_0) = f'(\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\Delta x = \frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{180}$.

Тогда из формулы (1) получим

$$\sin 29° = \sin(\frac{\pi}{6} + (-\frac{\pi}{180})) \approx \sin\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} \approx 0,484...\ .$$

С помощью калькулятора или иного вычислительного устройства можно получить значение $\sin 29^\circ \approx 0,4848096202...$ ▲

Пример 5. Привести формулу малых приращений для логарифма.

△ $f(x)=\ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$. Отсюда получим приближенную формулу $\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0} \cdot \Delta x$.

Если $x_0=1$ и $\Delta x = t$, то справедлива формула, $\ln(1+t) \approx t$.

Используя её, можно получить, например, значение $\ln 1,3907=$ $= \ln(1+0,3907) \approx 0,3907$.

В общем случае, если $x_0=0$, то $\Delta x = x - x_0 = x$. Тогда формула малых приращений (1) примет вид

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \qquad (2)$$ ▲

Задание, выполняемое в классе. Используя формулу (2), выведите приближенные формулы, справедливые для малых x

$\sin x \approx x$, $\quad$ $\mathrm{tg}\, x \approx x$, $\quad$ $e^x \approx 1 + x$,

$(1+x)^m \approx 1+mx$, в частности $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x$.

Пример 6. Найдите приближенное значение выражения $\dfrac{1}{0,997^{30}}$.

∆ Воспользуемся формулой: $(1+x)^m \approx 1+mx$

$\dfrac{1}{0,997^{30}}=(1-0,003)^{-30}\approx 1+(-30)(-0,003)=1+0,09=1,09.$

С помощью калькулятора или иного вычислительного устройства можно получить значение $\dfrac{1}{0,997^{30}} \approx 1,0943223033...$. ▲

Отметим, что используя приближенную формулу $(1+x)^m \approx 1+mx$, можно вычислять и значения корней.

Действительно, пусть n – натуральное число, а число $|B|$ достаточно мало по сравнению с $|A^n|$.

Тогда

$$\sqrt[n]{A^n+B}=A\left(1+\frac{B}{A^n}\right)^{\frac{1}{n}} \approx A\left(1+\frac{B}{nA^n}\right)$$

или

$$\sqrt[n]{A^n+B} \approx A+\frac{B}{nA^{n-1}}.$$

Например, $\sqrt[3]{131}=\sqrt[3]{125+6}=5+\dfrac{6}{3\cdot 5^2}=5,08.$

С помощью калькулятора или иного вычислительного устройства можно получить значение $\sqrt[3]{125}=5,0788...$.

Опираясь на формулу (2), вычислим при достаточно малых x приближенные значения $\cos x$.

Так как $(\cos x)'=-\sin x$, то формула $f(x) \approx f(0)+f'(0)x$

примет вид $\cos x \approx \cos 0-(\sin 0)x=1$, то есть $\cos x \approx 1$.

Очевидно, что такая «приближенная» формула не годится для приближений.

Поэтому пойдём другим путём. Из основного тригонометрического тождества имеем $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

Очевидно, что когда x достаточно мало, x^2 тоже будет достаточно малым, $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x} \approx \sqrt{1-x^2}$.

Выше было сказано, что при достаточно малых x $\sin x \approx x$.

Поэтому из формулы $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$ непосредственно получим формулу $\sqrt{1-x^2} \approx 1-\frac{x^2}{2}$, т.е. справедлива формула $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$.

Пример 7. Найдите приближенное значение cos44°.

∆ Так как $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$, то

$$\cos 44^\circ = \cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{180}) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{180}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{180} =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{180}+\sin\frac{\pi}{180}). \quad \cos\frac{\pi}{180} \approx 1-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{180})^2 = 0,9998476...,$$

$\sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} = 0,0174532....$Значит, $\cos 44^\circ \approx 0,7193403....$

С помощью калькулятора или иного вычислительного устройства можно получить значение cos44°≈0,7193339... . ▲

? Вопросы и задания

1. Выпишите формулу малых приращений.
2. Приведите примеры на использование формулы малых приращений.

Упражнения

91. Найдите приближенные значения функции $f(x)$ в точках x_1 и x_2:

а) $f(x)=x^4+2x$, $x_1=2,016$, $x_2=0,97$;

б) $f(x)=x^5-x^2$, $x_1=1,995$, $x_2=0,96$;

в) $f(x)=x^3-x$, $x_1=3,02$, $x_2=0,92$;

г) $f(x)=x^2+3x$, $x_1=5,04$, $x_2=1,98$.

Найдите приближенные значения числовых выражений, используя приближенную формулу $(1+x)^m\approx1+mx$ (**92-93**):

92. а) $1,002^{100}$; б) $0,995^6$; в) $1,03^{200}$; г) $0,998^{20}$.

93. а) $\sqrt{1,004}$; б) $\sqrt{25,012}$; в) $\sqrt{0,997}$; г) $\sqrt{4,0016}$.

Найдите приближенные значения числовых выражений, используя приближенные формулы (94-97):

94. а) tg 44°; б) cos 61°; в) sin 31°; г) ctg 47°.

95. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0,04\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-0,02\right)$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0,03\right)$; е) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0,05\right)$.

96. а) $\frac{1}{1,003^{20}}$; б) $\frac{1}{0,996^{40}}$; в) $\frac{1}{2,0016^{3}}$; е) $\frac{1}{0,994^{5}}$.

97. а) ln0,9; б) $e^{0,015}$; в) $\frac{1}{0,994^{5}}$.

Найдите приближенные значения функции в заданных точках (98-106): $y=f(x)$.

98. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1,012$.

99. $y=\sqrt{x^2+x+3}$, $x=1,97$.

100. $y=x^3$, $x=1,021$.

101. $y=x^4$, $x=0,998$.

102. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1,03$.

103. $y=x^6$, $x=2,01$.

104*. $y=\sqrt{1+x+\sin x}$, $x=0,01$.

105*. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$, $x=0,01$.

106*. $y=\sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}$, $x=1,02$.

29–32 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

В 10 классе мы изучали процессы изменения популяции бактерий (темы 79-81). Далее мы продолжим это изучение с других позиций.

Задача 1. Пусть бактерия в конце определённого промежутка времени (несколько часов или минут) делится на две бактерии. В итоге популяция (т.е. количество бактерий в ней) увеличивается вдвое. В свою очередь, через определённое время две вышеуказанные бактерии опять делятся на две бактерии каждая и популяция увеличивается вдвое. Предположим, что при благоприятных условиях (досточные ресурсы, пространство, питательные вещества, вода, энергия и т.д.) этот процесс увеличения популяции продолжается.

Также предположим, что *скорость увеличения количества бактерий в популяции* пропорционально этому количеству.

Как изменяется количество бактерий в популяции в зависимости от времени t?

∆ Обозначим через $b(t)$ количество бактерий в популяции в момент времени t.

Согласно смыслу производной, скорость изменения количества бактерий в популяции в момент времени t равна $b'(t)$.

Согласно нашим предположениям, в каждый момент времени t величина $b'(t)$ пропорциональна величине $b(t)$, то есть

$$b'(t)=kb(t). \qquad (1)$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности.

Пусть $b_0 = b(0)$ – количество бактерий в начальный момент времени $t=0$.

Очевидно, что функция вида $b(t)=b_0e^{kt}$ удовлетворяет соотношению (1).

Действительно, $b'(t)=(b_0e^{kt})'=kb_0e^{kt}=kb(t)$.

Допустим, что в начале популяция состояла из 10 миллионов бактерий (b_0=10 млн.) и в конце первого часа их стало $b(1)=10e^k=20$ (млн). Отсюда получим $e^k=2$. Значит, $k=\ln 2$.

Найдём количество бактерий в популяции в момент времени t:

$b(t)=10e^{(\ln 2)t}=10\cdot 2^t$ (млн).

Этот результат совпадает с аналогичным результом, полученным в 10 классе. ▲

Исторические сведения. Проводя аналогичные рассуждения в 18 веке английский учёный Томас Мальтус получил соотношение

$$N'(t)=kN(t) \tag{2}$$

для роста численности населения Земли, здесь $N(t)$ – численность населения Земли в момент времени t, $N_0=N(t_0)$ – численность населения в начальный момент времени t_0.

Действительно, $N'(t)= N_0(e^{k(t-t_0)})'=kN_0e^{k(t-t_0)}=kN(t)$.

Исследуя закономерность $N(t)=N_0e^{k(t-t_0)}$, описывающую *экспоненциальный,* то есть неконтролируемый рост населения, Томас Мальтус пришёл к прогнозу, что когда-то на Земле будет ощущаться нехватка ресурсов и пищи (см. рисунок 30).

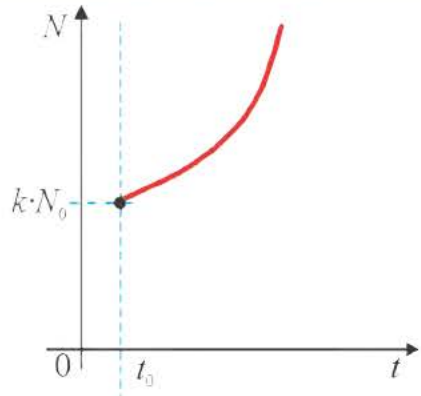


Рисунок 30.

Задача 2. Экология изучает взаимоотношение человека и вообще живых организмов с окружающей средой. Основным объектом экологии является эволюция популяций. Изучим вопрос о скорости изменения популяции организмов с учётом размножения и вымирания в силу определённых причин.

△ Пусть $N(t)$ – число особей в популяции в момент времени t. Тогда если A – число особей в популяции, рождающихся в единицу времени, а B – число особей, умирающих в единицу времени, то с достаточным основанием можно утверждать, что скорость изменения $N(t)$ со временем задаётся формулой

$$N'(t) =A–B \tag{3}$$

Исследователи рассматривают следующие случаи зависимости A и B от N.

а) Простейший случай: $A = aN(t)$, $B = bN(t)$. Здесь a и b коэффициенты рождения и смерти особей в единицу времени соответственно. Тогда соотношение (3) можно записать в виде

$$N'(t) = (a-b)N(t). \tag{4}$$

Полагая, что в момент времени t_0 число особей в популяции равно $N_0 = N(t_0)$, заметим, что функция $N(t) = N_0 e^{(a-b)(t-t\ )}$ удовлетворяет (4) (проверьте).

в) Часто встречается случай $A=aN(t)$, $B=bN^2(t)$. Тогда получим соотношение

$$N'(t) = aN(t) - bN^2(t). \tag{5}$$

Можно проверить, что функция $N(t) = \dfrac{N_0 a/b}{N_0 + [a/b - N_0]e^{-a(t-t_0)}}$ удовлетворяет этому соотношению. ▲

Соотношение (4) получил в 1845 году бельгийский ученый-демограф Ферхюльст. Для получения этого соотношения он использовал фактор борьбы между особями внутри популяции. Этот результат более точно описывает процесс изменения популяции, чем аналогичный результат (2), полученный Мальтусом.

Возникает естественный вопрос о том, как зависит рост популяции от чисел a и b.

На следующем рисунке изображены графики функций

$$N(t) = \frac{N_0 a/b}{N_0 + [a/b - N_0]e^{-a(t-t_0)}} \text{ при } \frac{a}{b} > N_0 \text{ и при } \frac{a}{b} < N_0$$

.

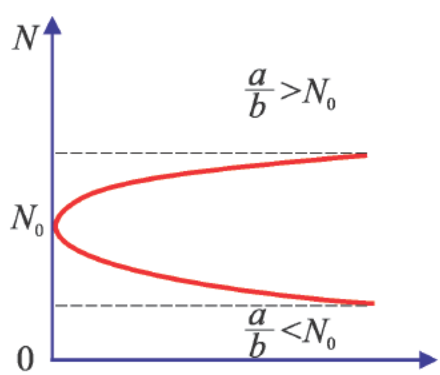


Рисунок 31.

Видно, что при возрастании времени число особей в популяции достаточно быстро стремится к числу $\frac{a}{b}$. Данный факт характеризует так называемое *явление насыщения* в популяции. Именно, начиная с определённого времени, изменение популяции становится незначительным.

Соотношения вида $y'(x)=F(x;\ y)$ связывающие аргумент, функцию и её производную, называются дифференциальными уравнениями.

Вышеприведённые соотношения (1) – (5) служат примерами дифференциальных уравнений.

В курсе высшей математики при определённых условиях на уравнение $y'(x)=F(x,\ y)$ доказывается, что существует единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Задача 3. Предположим, что торговыми учреждениями реализуется продукция, для ускорения сбыта которой были даны рекламные объявления по радио и телевидению. Последующая информация о продукции распространяется среди покупателей посредством общения друг с другом.

△ Изучим, как изменяется величина $x(t)$, характеризующая число знающих о продукции в момент времени t.

Тогда число не знающих о продукции потенциальтных покупателей равно $N-x(t)$.

Согласно нашему предположению, приходим к дифференциальному уравнению:

$$x'(t)=kx(t)(N-x(t)),$$

здесь $k>0$ – коэффициент пропорциональности.

Решение данного уравнения имеет вид $x(t)=\frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$, где $P=\frac{1}{e^{NC}}$, C – постоянная величина.

Очевидно, что при возрастании t величина Pe^{-Nkt} уменьшается и, поэтому выражение $x(t)=\frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$ неограниченно стремится к N (рисунок 32). ▲

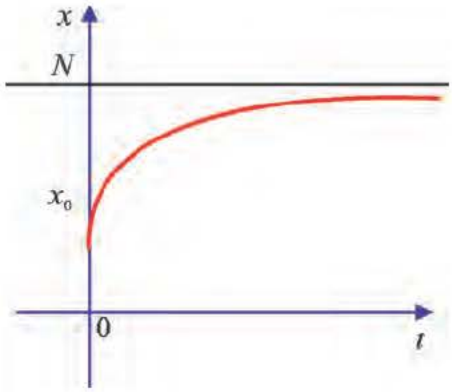


Рисунок 32.

Задача 4. Пусть тело массой *m,* постоянной теплоёмкости *c* имеет в начальный момент времени температуру T_0. Температура окружающего воздуха постоянна и равна τ ($T > \tau$). Считая, что теплоотдача тела в течение малого времени пропорциональна разности температур тела и окружающего воздуха, найдите закон, по которому остывает данное тело.

△ Во время остывания температура тела падает с T_0 до τ. Пусть в момент времени *t* температура тела равна $T(t)$. Так как количество тепла, отдаваемого в течение малого времени, пропорционально разности температур тела и окружающего воздуха, то

$$Q'(t) = -k(T - \tau)$$

здесь k – коэффициент пропорциональности.

С другой стороны, из курса физики известно, что количество тепла, отдаваемого в течение малого времени, равно $Q = mc(T(t) - \tau)$. Вычислим производную:

$$Q'(t) = mcT'(t). \qquad (6)$$

Сравнивая оба полученных выражения для $Q'(t)$, получим дифференциальное уравнение $mcT'(t) = -k(T - \tau)$. Функция

$$T(t) = \tau + Ce^{-\frac{k}{mc}t}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) (проверьте!), здесь C – произвольная постоянная.

Начальное условие ($T = T_0$ при $t = 0$) C позволяет найти C:

$$C = T_0 - \tau.$$

Поэтому закон, по которому остывает данное тело, можно записать так:

$$T(t) = \tau + (T_0 - \tau)\, e^{-\frac{k}{mc}}.$$

Ответ: $T(t) = \tau + (T_0 - \tau)\, e^{-\frac{k}{mc}}$ ▲.

Задача 5. Лепёшка, вынутая из печи, за 20 минут остывает со 100° до 60°. Температура окружающего воздуха равна 25°. За какое время лепёшка остынет до 30° ?

△ Используя решение предыдущей задачи, мы запишем закон, по которому остывает лепёшка:

$$T(t) = \tau + (T_0 - \tau)\, e^{-\frac{k}{mc}} = 25 + (100 - 25)e^{at} = 25 + 75e^{at},$$

Здесь a – неизвестный коэффициент.

Найдём a, используя условие $T(20)=60$ при $t=20$:

$$T(20) = 25 + 75e^{20a} = 60,$$

$$75e^{20a} = 35, \quad (e^a)^{20} = \frac{35}{75} = \frac{7}{15}, \quad e^a = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Значит, остывание лепёшки проходит по закону $T = 25 + 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}$.

Найдём время, за которое лепёшка остынет до 30°:

$$30 = 25 + 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}, \quad \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{5}{75} = \frac{1}{15},$$

Так как $\ln\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{t}{20}(\ln(7) - \ln(15))$

найдём $t^* = \dfrac{-20\ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx \dfrac{-20 \cdot 2{,}7081}{-0{,}762} \approx 71.$

Лепешка остынет до 30° за 1 час 11 минут. ▲

Задача 6. Моторная лодка движется в стоячей воде со скоростью 20 км/час. Через некоторое время двигатель вышел из строя. В результате через 40 секунд скорость лодки оказалась равной 8 км/час. Считая, что сопротивление воды пропорционально скорости лодки, найдите скорость лодки через 2 минуты после остановки двигателя.

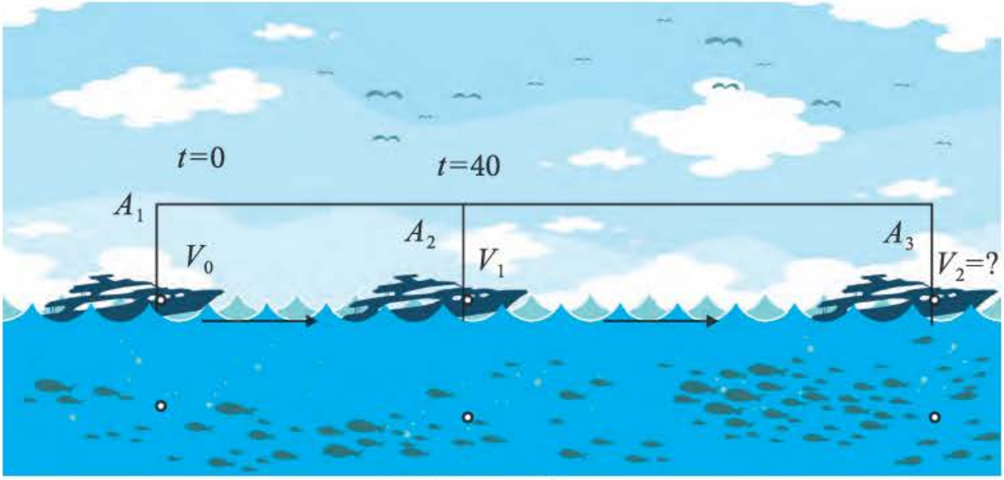


Рисунок 33.

△ На лодку действует сила сопротивления воды $F=-kv$. Согласно закону Ньютона $F=mv'(t)$. Отсюда $mv'(t)=-kv$.

Данному уравнению удовлетворяет функция $v(t)=Ce^{-\frac{k}{m}t}$. Учитывая, что *при* $t=0$ $v=20$, найдём $C=20$.

Отсюда $v(t)=20e^{-\frac{r}{m}t}$, $t=40$, $s=\frac{1}{90}$. Учитывая то, что через 40 секунд скорость лодки оказалась равной 8 км/час, получим $8=20e^{-\frac{r}{m}\cdot\frac{1}{90}}$ или $e^{\frac{r}{m}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{90}$. Тогда через 2 минуты скорость лодки окажется равной $t=2\,\text{мин}=\frac{1}{30}$. $v=20\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{90}\right]^{-\frac{1}{30}}=20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}=\frac{32}{25}\approx 1,28$ (км/с).

Ответ: скорость лодки через 2 минуты после остановки двигателя будет приблизительно равной 1,28 км/час.▲

Задача 7. Найдите закон, по которому изменяется масса $m(t)$ радиактивного вещества в результате процесса радиактивного распада. Здесь $m(t)$ измеряется в граммах, а t – в годах.

△ Предположим, что скорость радиактивного распада пропорциональна массе. Тогда получим дифференциальное уравнение

$$m'(t)=-\alpha\, m(t) \tag{7}$$

Можно проверить, что функция $m(t)=Ce^{-\alpha t}$ является решением данного уравнения.

Из начального условия $m(t_0)=m_0$ получим закономерность $m(t)=m_0e^{-\alpha\ (t-t_0)}$. *Ответ:* $m(t)=m_0e^{-\alpha\ (t-t_0)}$. ▲

Экономические модели. Как известно, спрос и предложение – экономические категории товарного производства, возникающие и функционирующие на рынке, в сфере товарного обмена. При этом спрос – представленная на рынке потребность в товарах, а предложение – продукт, который есть на рынке или может быть доставлен на пего. Одним из экономических законов товарного производства является закон спроса и предложения, который заключается в единстве спроса и предложения и их объективном стремлении к соответствию.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в течение некоторого (достаточно продолжительного) времени фермер продаёт на рынке фрукты (например, яблоки), причём продаёт их после уборки урожая, с недельными перерывами.

Тогда, при имеющихся у фермера запасах фруктов недельное предложение будет зависеть как от ожидаемой цены в наступающей неделе, так и от предполагаемого изменения цены в последующие недели. Если в наступающей неделе предполагается, что цена упадет, а в последующие недели повысится, то предложение будет сдерживаться при условии превышения ожидаемого повышения цен над издержками хранения. При этом предложение товара в ближайшую неделю будет тем меньшим, чем большим предполагается в дальнейшем повышение цены. И наоборот, если в наступающей неделе цена будет высокой, а затем ожидается её падение, то предложение увеличится тем больше, чем большим предполагается понижение цены в дальнейшем.

Если обозначить через p цену на фрукты в наступающей неделе, а через p' – так называемую тенденцию формирования цены (производную цены по времени), то как спрос, так и предложение будут функциями указанных величин. При этом, как показывает практика, в зависимости от разных факторов спрос и предложение могут быть различными функциями цены и тенденции формирования цены. В частности, одна из таких функций задаётся линейной зависимостью, математически описываемой соотношением $y=ap'+bp+c,$ где $a,\ b,\ c$ – некоторые действительные числа. А если, например, в рассматриваемой задаче обозначим предложение за q, а спрос за s, то можно считать, что вышеуказанные связи могут, например, описываться уравнениями $q=4p'-2p+39$, $s=44p'+2p-1$. Для того, чтобы спрос соответствовал предложению, необходимо выполнение равенства $4p'-2p+39=44p'+2p-1$.

Отсюда получим дифференциальное уравнение $p'=-\frac{p-10}{10}$.

Обозначим первоначальную цену как $p(0)=p_0$, Тогда получим, что цена меняется по закону $p=(p_0-10)e^{-\frac{t}{10}}+10$. ▲

Инвестиции. Предположим, что единица товара продаётся с прибылью p. Обозначим через $Q(t)$ функцию, отражающую изменение количества товара за время t . Тогда доход, полученный за время t, равен $pQ(t)$. Допустим, что часть дохода инвестируется в производство, то есть

$$I(t)=mpQ(t)\,, \tag{8}$$

Здесь m – норма инвестиции, постоянная, причем $0<m<1$.

Если мы представим, что рынок достаточно обеспечен товаром, а сам товар полностью продан, то в результате темпы производства повышаются.

Темпы производства пропорциональны повышению инвестиций, то есть

$$Q'=l\cdot I(t), \tag{9}$$

здесь l – коэффициент пропорциональности. Подставив (8) в (9), получим дифференциальное уравнение

$$Q'=kQ\,,\quad k=lmp\,. \tag{10}$$

Пусть C – произвольная постоянная, тогда функция вида $Q=Ce^{kt}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (10).

Предположим, что в начальный момент $t=t_0$ объём производства равен Q_o. Тогда из этого условия можно найти постоянную C:

$$Q_0=Ce^{kt_0}\text{, отсюда } C=Q_0e^{-kt_0}\,.$$

В результате получим, что объём производства изменяется по закону $Q=Q_0e^{k(t-t_0)}$.

Вопросы и задания

1. Приведите математическую модель процесса деления бактерий на две.
2. Объясните выводы Томаса Мальтуса о росте населения.

3. Поясните поведение логистической кривой Мальтуса.
4. Приведите математическую модель процесса распространения рекламной информации.

Задания

Используя результат 4-го примера решите задачи **(107–108):**

107. Металлическая заготовка, имеющая температуру 25°C, помещена в печь. Температура в печи равномерно повышается с 25°C со скоростью 20°C в минуту. Когда разность температур печи и металла стала равна T°C, металлическая заготовка стала нагреваться со скоростью $10 \cdot T$°C в минуту. Найдите температуру заготовки через 30 минут.

108. В начале тело имело температуру 5°C. За N минут тело нагрелось до 10°C. Температура окружающей среды равна 25°C. Когда тело нагреется до 20 °C?

Используя результат 7-ой задачи решите задачу**:**

109. Экспериментально установлено, что в течение 1 года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг.

а) Через какое время распадется 20 процентов имеющегося радия?

б) Сколько процентов радия останется через 400 лет?

Используя рассуждения 6-го примера решите задачи **(110–111):**

110. В результате сопротивления воды лодка стала замедлять движение. Сопротивление воды пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки равна 1,5 м/с, а через 4 секунда скорость стала равной 1 м/с. Через какое время скорость лодки упадёт вдвое?

111. Баллон вместимостью 10 *л* наполнен атмосферным воздухом (80% азота, 20% кислорода). В ёмкость под давлением подаётся азот со скоростью 1 литр в секунду. Подаваемый азот, непрерывно смешиваясь со смесью в баллоне, выходит из него с той же скоростью. Через какое время в баллоне образуется смесь с 95% азота?

Указание: Обозначив через $y(t)$ – процентное содержание азота в момент времени t, предположите, что функция $y(t)$ удовлетворяет соотношению $y' \cdot V = a(1-y)$ (почему?). Здесь V – вместимость баллона, a- скорость подачи азота.

Типовое контрольное задание

1. Планируется изготовить металлическую ёмкость в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, открытым верхом и вместимостью 270 *л*. Найдите его измерения при условии, что затраты металла на его изготовление должны быть минимальными.

2. Материальная точка движется по закону $s(t) = -\frac{t^4}{4} + 72t^3$.

Найдите:

1) момент времени t_0, при котором ускорение максимально;

2) мгновенную скорость в момент времени t_0;

3) путь, пройденный за время t_0.

3. Найдите приближённое значение $\ln 0{,}92$.

4. Найдите приближённое значение sin (–1, 2).

5. Дневной доход предпринимателя определяется формулой:
$P(x) = -3x^2 + 42x - 6$ (тыс.сум), здесь x – количество изделий.

Определите:

1) Какое количество изделий должно быть изготовлено для достижения наибольшего дохода?

2) Чему равен этот наибольший доход?

33–36 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

112. Материальная точка движется по прямой согласно закону движения $s=s(t)$. Пусть t измеряется в секундах, а s – в метрах. Найдите наибольшую и наименьшую скорость точки:

1) $s=13t$; 2) $s=17t-5$; 3) $s=t^2+5t+18$; 4) $s=t^3+2t^2+5t+8$; 5) $s=2t^3+5t^2+6t+3$; 6) $s=13t^3+2t^2$; 7) $s=t^3+t^2+3$.

113. Выпишите уравнение касательной в точке с абсциссой: 1) $x_0=-1$; 2) $x_0=2,2$; 3) $x_0=0$ к графику функции:

1) $f(x)=12x^2+5x+1$; 2) $f(x)=13x+4$; 3) $f(x)=60$; 4) $f(x)=x^3+4x$.

114. Выпишите уравнение касательной к графику функции, параллельной прямой $y=-7x+2$:

1) $f(x)=5x^3-2x^2+16$; 2) $f(x)=-4x^2+5x+3$; 3) $f(x)=-8x+5$.

115. В каких точках касательные к графикам функций $f(x)$ и $g(x)$ будут параллельными:

1) $f(x)=2x^2-3x+4$, $g(x)=12x-8$;
2) $f(x)=18x+19$, $g(x)=-15x+18$;
3) $f(x)=2x+13$, $g(x)=4x-19$;
4) $f(x)=2x^3$, $g(x)=4x^2$;
5) $f(x)=2x^3+3x^2$, $g(x)=15x-17$;
6) $f(x)=2x^4$, $g(x)=4x^3$?

116. 1) Пусть $y=\frac{1}{x}$. Составьте уравнение касательной к графику функции, проходящей через точку с абсциссой $x=-\frac{1}{2}$. 2) Точки с абсциссами $x=1$ и $x=3$ на параболе $y=x^2$ соединены отрезком. Через какую точку проходит касательная к параболе, параллельная данному отрезку?

3) Материальная точка движется по прямой согласно закону движения $s(t)=\frac{2}{9}\cdot\sin\frac{\pi t}{2}+3$. Пусть t измеряется в секундах, а s – в метрах. Найдите наибольшую и наименьшую скорость точки.

117. Найдите значение производной в заданной точке:

1) $f(x)=x^2-15$, $x_0=-\frac{1}{2}$;

2) $f(x)=3\cos x$, $x_0=-\pi$;

3) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=-2$;

4) $f(x)=-\sin x$, $x_0=-\frac{\pi}{3}$;

5) $f(x)=x^3-4$, $x_0=5$;

6) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$;

7) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x_0=-2$;

8) $f(x)=\cos 5x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

9) $f(x)=-\cos 2x$, $x_0=-\frac{\pi}{8}$.

118. Найдите скорость и ускорение в заданный момент времени:

1) $s(t)=5t^2-t+50$ $t_0=2$;

2) $s(t)=t^3+12t^2+1$, $t_0=1$;

3) $s(t)=2t+t^3$, $t_0=5$;

4) $s(t)=8\sin t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$.

119. Найдите значение производной в заданной точке:

1) $f(x)=x^2-15$, $x_0=\frac{1}{2}$;

2) $f(x)=3\cos x$, $x_0=\pi$;

3) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=2$;

4) $f(x)=-\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$;

5) $f(x)=x^3-4$, $x_0=-5$;

6) $f(x)=\sin x$, $x_0=-\frac{\pi}{6}$;

7) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x_0=2$;

8) $f(x)=\cos 5x$, $x_0=-\frac{\pi}{4}$;

9) $f(x)=-\cos 2x$, $x_0=\frac{\pi}{8}$;

10) $f(x)=\sin 2x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

120. Найдите скорость и ускорение в заданный момент времени:

1) $s(t)=3t^2-2t+10$, $t_0=2$;

2) $s(t)=t^3-6t^2+1$, $t_0=1$;

3) $s(t)=5t+2t^3$, $t_0=5$;

4) $s(t)=8\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$.

Найдите производную функции **(121-122):**

121. 1) $f(x)=-x^2+x+30$; | 2) $f(x)=\sin x-\cos x$; | 3) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$;

4) $f(x)=4^x-\sin x$; | 5) $f(x)=8\cos x$; | 6) $f(x)=\ln x-10x^2+x-1$.

122. 1) $y=x^4$; | 2) $y=\dfrac{x-1}{x+2}$; | 3) $y=x-\dfrac{20}{x}$; | 4) $y=x^2\ln x$;

5) $y=x^3\sin x$; | 6) $y=e^x\sin x$; | 7) $y=\dfrac{x+1}{4x^2}$; | 8) $y=2(10x-1)\sin x$.

123. Вычислить значения $f'(-\frac{\pi}{2}), f'(\frac{\pi}{4})$:

1) $f(x)=e^x\cos x$; | 2) $f(x)=3x+1$; | 3) $f(x)=2x^2+x+3$;

4) $f(x)=\sin x+x^2$; | 5) $f(x)=\sin x+\cos x$; | 6) $f(x)=\sin x$;

7) $f(x)=\cos x+x^4$; | 8) $f(x)=\sin 3x+\cos 3x$.

124. Материальная точка движется по прямой согласно закону движения $x(t)=-\dfrac{t^3}{6}+6t^2+15$. Пусть t измеряется в секундах, а s – в метрах.

Найдите:

1) момент времени t_0, при котором ускорение равно 0;

2) мгновенную скорость в момент времени t_0.

125*. Под каким углом график функции $f(x)=x^2-13x+2$ пересекается с осью x?

126. Найдите значение $f'(0)$: 1) $f(x)=x^6-4x^3+4$; | 2) $f(x)=(x+10)^6$.

127. Найдите значение $y'(x)$: 1) $y(x)=\sin^2 x$; | 2) $y(x)=\cos^2 x$; 3) $y(x)=\mathrm{tg}^2 x$.

128. Найдите промежутки возрастания и убывания:

1) $f(x)=3+7x$; | 2) $f(x)=x^3+17x$; | 3) $f(x)=\dfrac{1}{4}x+18$;

4) $f(x)=\dfrac{x+21}{x}$; | 5) $f(x)=x^2+5x-14$; | 6) $f(x)=x(x^2+8)$;

7) $f(x)=-x^2-4x+6$; 8) $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$;

9) $f(x)=x^3-12x^2-17x-23$; 10) $f(x)=3x^4+18x^3-6$;

11) $f(x)=x^3-5x^2+19x+22$; 12) $f(x)=x^4+7x^2$.

129. Найдите стационарные точки:

1) $f(x)=3x^2-7x+9$; | 2) $f(x)=19x-\dfrac{1}{7}x^3$; | 3) $f(x)=5x^3$;

4) $f(x)=8x^2$; | 5) $f(x)=7x-14$; | 6) $f(x)=27-x^3$;

7) $f(x)=12x^3+13x^2-16$; | 8) $f(x)=x^3-6x^2+9$.

130. Найдите локальные максимумы и минимумы функции:

1) $f(x)=x^2-\frac{1}{4}x^4$; 2) $f(x)=14+13x^2-12x^3$;

3) $f(x)=x^4-3x^3+x^2+9$; 4) $f(x)=2x^4-x^3+7$.

131. Найдите промежутки возрастания и убывания, а также локальные максимумы и минимумы функции:

1) $f(x)=x^3-64x$; 2) $f(x)=2x^3-24$; 3) $f(x)=4x^3-108x$.

132. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции:

1) $f(x)=x^4-3x^2+2$, $x\in[-4;1]$; 2) $f(x)=x^5+6x^3+1$, $x\in[-1;2]$;

3) $f(x)=\frac{x}{x+4}$, $x\in[1;5]$; 4) $f(x)=x^3+6x^2+5x+8$, $x\in[-3;4]$.

133. Постройте график функции:

1) $y=x^3-2x^2+3x-2$; 2) $y=\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3$; 3) $y=x^4+4x^3$.

134. Найдите наибольшую площадь земельного участка прямоугольной формы, который можно огородить забором длиной 1000 метров.

135. Из картона формы квадрата со стороной 16 дм необходимо изготовить коробку без верха. Для этого отрезают одинаковые квадратные уголки. В каком случае мы можем получить коробку наибольшей вместимости?

136*. Консервная банка цилиндрической формы имеет полную поверхность площади 512 см^2. При каких радиусе основания и высоте достигается наибольшая вместимость?

137. Найдите измерения земельного участка прямоугольной формы площади 3600 м^2, который можно огородить забором с минимальной длиной.

138*. Около шара радиуса 8 дм описан конус наименьшего объёма. Найдите высоту этого конуса.

139*. Планируется изготовить металлическую ёмкость в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и вместимостью 32 *л*. Найдите его измерения при условии, что затраты металла на его изготовление должны быть минимальными.

140. Материальная точка движется по прямой согласно закону движения $s(t)=-\frac{t^4}{4}+10t^3$. Пусть t измеряется в секундах, а s – в метрах.

Найдите:

1) момент времени t_0, при котором ускорение максимально;

2) скорость в момент времени t_0;

3) путь, пройденный за время t_0.

141. В течение времени $t\in[0;10]$ минут в воздушный шар подаётся воздух объёма $V(t) = t^3+3t^2+2t+4$ m^3. Найдите:

1) объём воздуха, подаваемый в начале;

2) объём воздуха, подаваемый в момент времени $t=10$ мин;

3) скорость подачи воздуха в момент времени $t=5$ мин.

142. Акром получил заказ на пошив мужских брюк. Пусть он шьёт в течение месяца x брюк, получая при этом доход $p(x)=-2x^2+240x$ тыс. сум. Найдите:

1) Сколько брюк должно быть сшито, чтобы получить наибольший доход?

2) Чему равен этот наибольший доход?

143. Найдите производную функции:

1) $y=e^{3x}$; | 2) $y=e^{\sin x}$; | 3) $y=\sin(3x+2)$; | 4) $y=(2x+1)^4$;

5) $y=\frac{x-2}{x^2+1}$; | 6) $y=\frac{\ln x}{x}$; | 7) $y=\operatorname{arctg}2x$; | 8) $y=x^2\cdot\cos x$.

144. Пусть заданы функции $f(x)=e^{2x}$ и $g(x)=4x+2$. Составьте сложную функцию:

1) $F(x)=f(g(x))$; 2) $F(x)=f(x)^{g(x)}$;

3) $F(x)=g(f(x))$; 4) $F(x)=\sqrt{g(g(x))}$.

145. Найдите производную сложной функции:

1) $y=(x^2+1)^5$; 2) $y=\ln\cos x$;

3) $y=\sqrt{5x-7}$; 4) $y=\sqrt{\operatorname{tg}(2x-3)}$;

5) $y=\operatorname{arctg}(3x-4)$; 6*) $y=\sin(\operatorname{arctg}2x)$;

7) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$; 8*) $y=e^{\sin(\cos x)}$.

146. Найдите промежутки возрастания и убывания:

1) $y=2+x-x^2$;
2) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x\geq 0)$;
3) $y=3x-x^3$;
4) $y=2x-\sin x$;
5) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;
6) $y=\dfrac{x^2}{2^x}$;
7) $y=(x-1)^3$;
8) $y=(x-1)^4$.

147. Найдите стационарные точки, а также локальные максимумы и минимумы функции:

1) $y=x^3-6x^2+9x-4$;
2) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;
3) $y=x+\dfrac{1}{x}$;
4) $y=\sqrt{2x-x^2}$.

148. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции в заданном отрезке:

1) $f(x)=2^x$, $[-1;\,5]$;
2) $f(x)=x^2-4x+6$, $[-3;\,10]$;
3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $[0{,}01;\,100]$;
4) $f(x)=\sqrt{5-4x}$, $[-1;\,1]$;
5) $f(x)=\cos x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2};\,\pi\right]$;
6) $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$, $[-10;\,10]$;
7) $f(x)=\sin x$, $\left[\dfrac{\pi}{2};\,\pi\right]$;
8) $f(x)=\left|x^2+3x+2\right|$, $[-15;\,10]$.

149. Исследуйте функцию и постройте график:

1) $y=3x-x^3$;
2) $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$;
3) $y=(x+1)(x-2)^2$;
4) $y=x+\dfrac{1}{x}$;
5) $y=\sqrt{16-x^2}$;
6) $y=\sqrt{x^2-9}$;
7) $y=x^2-5|x|+6$;
8) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2$.

37–39 ПОНЯТИЯ ПЕРВООБРАЗНОЙ И НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

А вы знаете, что если точка двигаясь по прямой, за время t после начала движения проходит путь $s(t)$, то её мгновенная скорость равна производной функции $s(t)$: $v(t)=s'(t)$. На практике встречается обратная задача: найти пройденный путь $s(t)$, если задана скорость движения $v(t)$.

Эту задачу можно переформулировать так: найти функцию $s(t)$, если задана её производная $v(t)$.

Если $s'(t)=v(t)$, то функция $s(t)$ называется *первообразной функцией* функции $v(t)$. В общем случае можно ввести такое определение:

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на заданном промежутке $(a; b)$, если для всех x из промежутка $(a; b)$ выполнено $F'(x)=f(x)$.

Пример 1. Пусть a – заданное число, а $v(t)=at$. Тогда функция $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ является первообразной для функции $v(t)$, так как $s'(t) = (\frac{1}{2}at^2)' = at = v(t)$.

Пример 2. Пусть $f(x)=x^2$, $x\in(-\infty; \infty)$. Тогда функция $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ является первообразной для функции $f(x)$ на $(-\infty; \infty)$, так как

$$F'(x)=(\frac{1}{3}x^3)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

Пример 3. Пусть $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, при $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$. Тогда функция $F(x)=\text{tg}x$ является первообразной для функции $f(x)$, так как $(\text{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Пример 4. Пусть $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$, Тогда функция $F(x)=\ln x$ является первообразной для функции $\frac{1}{x}$, так как $F'(x)=(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Задача 1. Докажите, что функции $F_1(x)=\frac{x^4}{4}$, $F_2(x)=\frac{x^4}{4}+17$, $F_3(x)=\frac{x^4}{4}-25$ являются первообразными для функции $f(x)=x^3$.

△ Используя таблицу производных, мы можем написать:

1) $F_1'(x)=(\frac{x^4}{4})'=4\cdot\frac{x^3}{4}=x^3=f(x)$;

2) $F_2'(x)=(\frac{x^4}{4}+17)'=(\frac{x^4}{4})'+(17)'=4\cdot\frac{x^3}{4}+0+x^3=x^3=f(x)$;

3) $F_3'(x)=(\frac{x^4}{4}-25)'=(\frac{x^4}{4})'-(25)'=4\cdot\frac{x^3}{4}-0=x^3=f(x)$.

Из этой задачи можно сделать вывод: $F(x)=\frac{x^4}{4}+C$ (где C – постоянная является первообразной функцией для функции $f(x)=x^3$.

Действительно, $F'(x)=(\frac{x^4}{4}+C)'=(\frac{x^4}{4})'+C'=4\cdot\frac{x^3}{4}+0=x^3=f(x)$. ▲

Для заданной функции $f(x)$ её первообразная однозначно не определяется.

Именно, любая первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке может быть записана в виде $F(x)+C$, где $F(x)$- одна из первообразных для функции $f(x)$ на этом промежутке, (C – произвольная постоянная).

Совокупность всех функций вида $F(x)+C$ называется *неопределённым интегралом* функции $f(x)$ и обозначается так: $\int f(x)dx$.

Таким образом, $\int f(x)dx=F(x)+C$.

В этом обозначении $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, а выражение $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Пример 5. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$, так как согласно таблице производных,

$(\frac{a^x}{\ln a}+C)'=(a^x)'\cdot\frac{1}{\ln a}+C'=a^x\cdot\ln a\cdot\frac{1}{\ln a}+0=a^x$.

Пример 6. $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1,$

Так как $(\frac{x^{k+1}}{k+1} + C)' = \frac{1}{k+1} \cdot (x^{k+1})' + C' = \frac{k+1}{k+1} \cdot x^k + 0 = x^k$. Пусть $k=-1$

Согласно примеру 4. $x>0$, $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$.

График функции $y=F(x)+C$ можно получить из графика функции $y=F(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси Oy (рисунок 1). За счет выбора постоянной C можно добиться, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

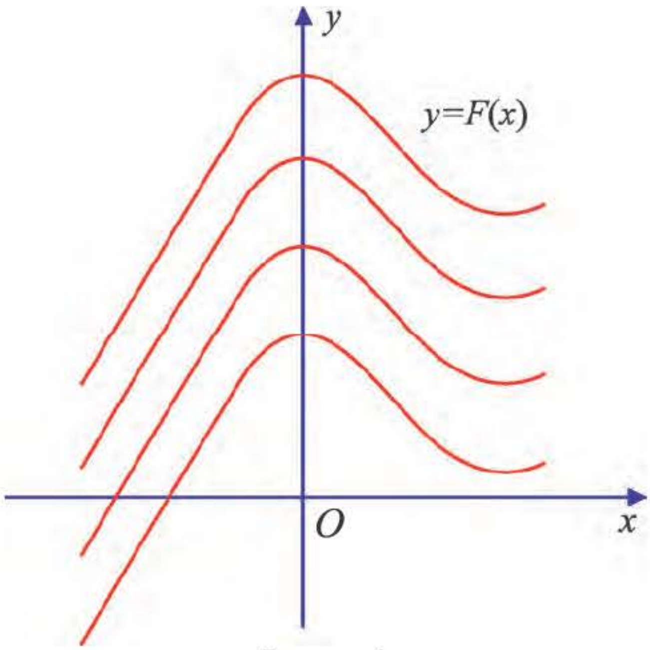


Рисунок 1.

Задача 2. Найдите первообразную для функции $f(x)=x^2$, график которой проходит через точку $A(3;\ 10)$.

△ Любая первообразная функции $f(x)=x^2$ имеет вид $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$,

так как $F'(x) = (\frac{x^3}{3} + C)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + C' = x^2 + 0 = x^2$.

Подберём постоянную C такую, чтобы график функции $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ проходил через точку (3; 10): Для этого необходимо, чтобы при x=3 выполнялось F (3)=10. Отсюда $10=\frac{3^3}{3}+C$, $C=1$.

Следовательно, искомая первообразная имеет вид $F(x)=\frac{x^3}{3}+1$.

Ответ: $\frac{x^3}{3}+1$. ▲

Задача 3. Найдите первообразную для функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$, график которой проходит через точку $A(5;\ 15)$.

△ Любая первообразная функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ имеет вид $F(x)=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+C$, так как

$$F'(x)=\left(\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+C\right)'=\frac{3}{4}(x^{\frac{4}{3}})'+C'=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}+C'=x^{\frac{1}{3}}+0=\sqrt[3]{x}.$$

Подберём постоянную C такую, чтобы график функции $F(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$ проходил через точку (5; 15). Для этого необходимо, чтобы выполнялось F(8)=15. Значит, $x^{\frac{4}{3}}=x\sqrt[3]{x}$ $15=\frac{3}{4}\cdot 8\cdot\sqrt[3]{8}+C$, отсюда $C=3$. Следовательно, искомая первообразная имеет вид $F(x)=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+3$.

Ответ: $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+3$. ▲

Задача 4*. Докажите, что $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

Δ При $x>0$ $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$, так как $(\ln x+C)'=\frac{1}{x}+0=\frac{1}{x}$;

При $x<0$ $\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C$, так как $(\ln(-x)+C)'=\frac{(-1)}{(-x)}+0=\frac{1}{x}$. ▲

? Вопросы и задания

1. Что называется первообразной? Приведите примеры.
2. Однозначно ли находится первообразная для заданной функции $f(x)$? Почему?
3. Как можно добиться, чтобы график первообразной функции $F(x)$ проходил через заданную функцию? Объясните на примере.

Упражнения

1. Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на всей числовой прямой $R=(-\infty,\infty)$:

1) $F(x)=x^2-\sin 2x+2018$, $f(x)=2x-2\cos 2x$;

2) $F(x)=-\cos\frac{x}{2}-x^3+28$, $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-3x^2$;

3) $F(x)=2x^4+\cos^2 x+3x$, $f(x)=8x^3-\sin 2x+3$;

4) $F(x)=3x^5+\sin^2 x-7x$, $f(x)=15x^4+\sin 2x-7$.

Используя таблицу производных, найдите первообразные для следующих функций (**2–6**):

2. 1) $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$; 2) $f(x)=6x^5$; 3) $f(x)=x^{10}$; 4) $f(x)=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x}$;

5) $f(x)=\sin x$; 6) $f(x)=\cos x$; 7) $f(x)=\sin 2x$; 8) $f(x)=\cos 2x$.

3. 1) $f(x)=4^x$; 2) $f(x)=\pi^x$; 3) $f(x)=e^x$; 4) $f(x)=a^x$;

5) $f(x)=a^{2x}$; 6) $f(x)=e^{\pi x}$; 7) $f(x)=10^{3x}$; 8) $f(x)=e^{2x+3}$.

4. 1) $f(x)=\frac{1}{2x+3}$; 2) $f(x)=\frac{1}{4x-5}$; 3) $f(x)=\frac{1}{2x+7}$;

4) $f(x)=\frac{1}{ax}$; 5) $f(x)=\frac{1}{ax+b}$; 6) $f(x)=\frac{a}{ax-b}$.

5. 1) $f(x)=\sin 3x$; 2) $f(x)=\sin(2x+5)$; 3) $f(x)=\sin(4x+\pi)$;

4) $f(x)=\cos 5x$; 5) $f(x)=\cos(3x-2)$; 6) $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{2})$.

6. 1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^5}$; 3) $f(x)=(3x+2)^2$; 4) $f(x)=(2x-1)^3$.

7. Для заданной функции найдите первообразную, график которой проходит через указанную точку:

1) $f(x)=2x+3$, $A(1;\ 5)$; 2) $f(x)=-x^2+2x+5$, $A(0;\ 2)$;

3) $f(x)=\sin x$, $A(0;\ 3)$; 4) $f(x)=\cos x$, $A(\frac{\pi}{2};5)$.

Для заданной функции найдите первообразную, график которой имеет с прямой y единственную общую точку (**8–9**):

8. 1) $f(x)=4x+8,\ y=3;$ 2) $f(x)=3-x,\ y=7,$

3) $f(x)=4,5x+9,\ y=6,8;$ 4) $f(x)=2x-6,\ y=1.$

9*. $f(x)=ax+b,\ y=k.$

Указание: из условия задачи и квадратного уравнения

$F(x)=\dfrac{ax^2}{2}+bx+C,\ \ \dfrac{ax^2}{2}+bx+C=k$ найдите C. $C=\dfrac{2ak+b^2}{2a}=k+\dfrac{b^2}{2a}$.

10*. Для заданной функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через указанную точку:

1) $f'(x)=\dfrac{16}{x^3},$ $A(1;\ 10)$ и $B(4;\ -2);$

2) $f'(x)=\dfrac{54}{x^4},$ $A(-1;\ 4)$ и $B(3;\ 4);$

3) $f'(x)=6x,$ $A(1;6)$ и $B(3;30);$

4) $f'(x)=20x^3;$ $A(1;9)$ и $B(-1;7).$

Указание: Из заданной $f'(x)$ найдём $f(x)+C_1$. Далее для функции $f(x)+C_1$ найдём первообразную $F(x)=\int f(x)dx+C_1x+C_2$. Подставляя координаты указанных точек в последнее равенство, получите систему уравнений относительно C_1 и C_2.

11*. Для заданной функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой пересекает график производной $f(x)$ в точке с заданной абсциссой:

1) $f(x)=(3x-2)^{\frac{1}{3}},\ x_0=1;$ 2) $f(x)=(4x+5)^{\frac{1}{4}},\ x_0=-1;$

3) $f(x)=(7x-5)^{\frac{1}{7}},\ x_0=1;$ 4) $f(x)=(kx+b)^{\frac{1}{k}},\ x_0=\dfrac{1-b}{k}.$

12. Для заданной функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через указанную точку:

1) $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$, $A(3;\ 7)$; 2) $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$, $A(0;\ 1)$;

3) $f(x)=\cos x$, $A(\dfrac{\pi}{2};8)$; 4) $f(x)=\sin x$, $A(\pi;10)$.

13. Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для заданной функции $f(x)$ на всей числовой оси:

1) $F(x)=k\cdot e^{\frac{x}{k}}$, $f(x)=e^{\frac{x}{k}}$, $k\neq 0$;

2) $F(x)=C+\sin kx$, $f(x)=k\cdot\cos kx$, C – произвольная постояная;

3) $F(x)=C+\cos kx$, $f(x)=-k\cdot\sin kx$, C – произвольная постояная;

4) $F(x)=\dfrac{1}{5}\sin(5x+12)$, $f(x)=\cos(5x+12)$.

14. Для заданной функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через указанную точку:

1) $f(x)=\sin 3x$, $A(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{1}{3})$; 2) $f(x)=\cos 5x$, $A(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{4}{5})$;

3) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$, $A(\dfrac{\pi}{3};1)$; 4) $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}$, $A(\pi;\dfrac{9}{2})$.

15. Пусть $(x_0;\ y_0)$ – решение заданной системы уравнений. Для заданной функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку:

1) $f(x) = 3x^2$; $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=3,\\ 4\log_2 x-\log_2 y=2.\end{cases}$

2) $f(x)=4x^3$; $\begin{cases}5^x+5^y=30,\\ 3\cdot 5^x-2\cdot 5^y=15.\end{cases}$

3) $f(x)=\cos x$; $\begin{cases}x+y=\dfrac{3\pi}{2},\\ 4x-3y=-\pi.\end{cases}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{5x+e}$; $\begin{cases}2^x+3^y=4,\\ 3\cdot 2^x-3^y=0.\end{cases}$

40–43 ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Опираясь на таблицу производных можно составить *таблицу интегралов*.

№	Функция $f(x)$	Первообразная функция $F(x)+C$
1	$x^p, \quad p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1}+C$
2	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert+C$
3	e^x	e^x+C
4	$\sin x$	$-\cos x+C$
5	$\cos x$	$\sin x+C$
6	$(kx+b)^p, \quad p\neq -1, \quad k\neq 0$	$\dfrac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
7	$\dfrac{1}{kx+b}, \quad k\neq 0$	$\dfrac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert+C$
8	$e^{kx+b}, \ k\neq 0$	$\dfrac{1}{k}e^{kx+b}+C$
9	$\sin(kx+b), \quad k\neq 0$	$-\dfrac{1}{k}\cos(kx+b)+C$
10	$\cos(kx+b), \quad k\neq 0$	$\dfrac{1}{k}\sin(kx+b)+C$
11	$1/\cos^2 x$	$\mathrm{tg}x+C$
12	$1/\sin^2 x$	$-\mathrm{ctg}x+C$
13	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
14	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}x+C$
15	$f(kx+b)$	$\dfrac{1}{k}F(kx+b)+C$
16	$f(g(x))g'(x)$	$F(g(x))+C$

Для того, чтобы функция $F(x)$ была первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, необходимо, чтобы обе функции $F(x)$ и $f(x)$ были определены на этом промежутке X.

Например, $\frac{1}{5x-8}$ при $5x-8>0$, то есть при $x>1{,}6$, согласно таблице интегралов, первообразная равна $\frac{1}{5}\ln(5x-8)+C$.

Используя правила дифференцирования, можно сформулировать некоторые *правила интегрирования*.

Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ на некотором промежутке являются первообразными для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Справедливы правила:

Правило 1: Функция $a{\cdot}F(x)$ является первообразной для функции $a{\cdot}f(x)$, то есть

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot F(x)+C.$$

Правило 2: Функция $F(x)\pm G(x)$ является первообразной для функции $f(x)\pm g(x)$, то есть:

$$\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx \pm \int g(x)dx=F(x)\pm G(x)+C.$$

Пример 1. Проинтегрируйте функцию $f(x)=5\sin(3x+2)$.

∆ Согласно правилу 1 и 9 пункту таблицы интегралов:

$$\int f(x)dx=\int 5\sin(3x+2)dx=5\int \sin(3x+2)dx=$$

$$=5\cdot(-\frac{1}{3}\cos(3x+2))+C=-\frac{5}{3}\cos(3x+2)+C,$$

Так как согласно таблице интегралов $\int \sin(3x+2)dx=-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C.$

Ответ: $-\frac{5}{3}\cos(3x+2)+C.$ ▲

Пример 2. Проинтегрируйте функцию $f(x)=8x^7+2\cos 2x$.

∆ Найдём интеграл этой функции, используя правила 1, 2 интегирования, а также пункты 1 и 10 таблицы интегралов:

$$\int f(x)dx=\int (8x^7+2\cos 2x)dx=8\int x^7dx+2\int \cos 2x dx$$

$$= 8\cdot\frac{1}{8}x^8 + 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C = x^8 + \sin 2x + C.$$

Ответ: $x^8 + \sin 2x + C.$ ▲

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\frac{xdx}{x^2+8}$.

△ При решении таких примеров удобно использовать *замену переменных.*

Именно, обозначим $x^2+8=u$ тогда, $du = 2x\,dx$, $xdx = \frac{1}{2}du$. Отсюда

$$\int\frac{xdx}{x^2+8} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+8) + C.$$

Проверка: Найдём производную от полученной функции и получим подынтегральную функцию $\frac{x}{x^2+8}$. Действительно,

$$\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+8) + C\right)' = \frac{1}{2}(\ln(x^2+8))' + C' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+8}\cdot(x^2+8)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+8} = \frac{x}{x^2+8}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+8) + C.$ ▲

Пример 4. Вычислить интеграл $\int e^{\sin x}\cos x dx$.

△ Сделаем замену $\sin x = t$. Тогда $dt = \cos x dx$ и заданный интеграл получит вид $\int e^t dt$. Согласно пункту 3 таблицы интегралов $\int e^t dt = e^t + C$, $\int e^{\sin x}\cos x dx = e^{\sin x} + C.$

Проверка. $(e^{\sin x}+C)' = (e^{\sin x})' + C' = e^{\sin x}(\sin x)' + 0 = e^{\sin x}\cos x.$

Ответ: $e^{\sin x}+C.$ ▲

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\sin 5x\cdot\cos 3x dx$.

△ При вычислении этого интеграла помогает тождество $2\sin 5x\cdot\cos 3x = \sin 8x + \sin 2x.$

Тогда

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16}(-\cos 8x) + \frac{1}{4}(-\cos 2x) + C = -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Ответ: $-\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$ ▲

Пример 6*. Вычислить интеграл $\int \cos mx \cos nx dx$.

△ Согласно тождеству $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$ и пункту 10 таблицы интегралов:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + C.$ ▲

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$.

△ Для подынтегральной функции справедлива равенства:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C,$$

Ответ: $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.$ ▲

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

△ Для вычисления этого интеграла воспользуемся $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ и $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\text{tg}x+C$. Тогда

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\text{tg}\frac{x}{2}+C=\text{tg}\frac{x}{2}+C.$$

Проверка: $(\text{tg}\frac{x}{2}+C)'=(\text{tg}\frac{x}{2})'+C'=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot(\frac{x}{2})'+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{1+\cos x}$.

Ответ: $\text{tg}\frac{x}{2}+C$. ▲

Пример 9. Вычислить интеграл $\int\sin^2 2xdx$.

△ Для вычисления этого интеграла воспользуемся $2\sin^2 2x=1-\cos 4x$.

$$\int\sin^2 2xdx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 4xdx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$$

Ответ: $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C$. ▲

? Вопросы и задания

1. Выберите любые пункты из таблицы интегралов и докажите их справедливость.
2. Приведите простейшие правила интегрирования. Объясните на примерах.
3. В чём заключается метод замены переменных? Примените его к нахождению интеграла $\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$.

Упражнения

Найдите хотя бы одну первообразную для заданных функций **(16-18):**

16. 1) $3x^5-4x^3$; 2) $8x^7-5x^4$; 3) $\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}$; 4) $\frac{5}{x^4}+\frac{3}{x^5}$;

5) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x}$; 6) $7\sqrt[3]{x}-5\sqrt{x}$; 7) $5x^4+4x^3-2x^2$.

17. 1) $5\cos x-3\sin x$; 2) $7\sin x+4\cos x$; 3) $2\cos x-a^x$;

4) $5e^x+2\cos x+1$; 5) $4+2\cdot e^{-x}-7\sin x$; 6) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{x}-e^{-x}$.

18. 1) $(x-2)^3$; 2) $(x+5)^4$; 3) $\frac{1}{\sqrt{x-5}}$; 4) $\frac{6}{\sqrt[3]{x+7}}$;

5) $4\cos(x+5)+\frac{8}{x-7}$; | 6) $2\sin(x-3)-\frac{4}{x-2}$; | 7) $(3x+7)^4+\frac{1}{x^5}$.

Найдите все первообразные для заданных функций **(19-20):**

19. 1) $\cos(5x+3)$; 2) $\sin(7x-6)$; 3) $\cos(\frac{2x}{3}+1)$;

4) $\sin(\frac{5x}{7}-2)$; 5) $e^{\frac{2x+3}{4}}$; 6) e^{3-2x};

7) $\frac{4}{\cos^2 x}$; 8) $\frac{3}{\cos^2 4x}$; 9) $\frac{5}{\sin^2 5x}$.

20. 1) $\frac{4}{x^5}-(1-2x)^3$; 2) $(3x+2)^4-\frac{1}{x^6}$; 3) $x+\frac{2}{\cos^6 x}-1$;

4) $2x-\frac{3}{\sin^2 x}+6$; 5) $(1+3x)(x-1)$; 6) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+2\sin(3x-1)$.

21. Для заданной функции найдите такую первообразную, график которой проходит через указанную точку (**22–28**):

1) $f(x)=\sin 4x,\ A(\frac{\pi}{4};7)$; 2) $f(x)=\cos 5x,\ A(\frac{\pi}{4};4)$;

3) $f(x)=3x^2+\frac{2}{\sqrt{x+2}},\ A(-1;0)$; 4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2\sqrt{x-1}},\ A(2;0)$;

5) $f(x)=\cos^2 3x+\sin^2 3x+\frac{1}{4}\sin 4x,\ A(\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8})$;

6) $f(x)=\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x-2\cos\frac{x}{2}$, $A(2\pi;2\pi)$;

7) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{5-2x}}+4x$, $A(2;6)$; 8) $f(x)=6x^2-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$, $A(-2;4)$.

Найдите (**22–28**):

22. 1) $\int(x^3-\sin 2x-3)dx$; 2) $\int(x^4+\cos 3x+4)dx$;

3) $\int(x^2-\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})dx$; 4) $\int(4x^3+\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{3})dx$.

23*. 1) $\int(\frac{8}{\sin^2 x}+6\cos^2 x+2)dx$; 2) $\int(\frac{6}{\cos^2 x}-8\sin^2 x+3)dx$;

3) $\int\sin 2x\cos 2xdx$; 4) $\int(\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x)dx$;

5) $\int(\sin 2x\cdot\sin 4x+\cos 2x\cos x)dx$; 6) $\int\cos^2 5xdx$.

24*. 1) $\int\sin 5x\cos 3xdx$; 2) $\int\cos 2x\cos 3xdx$; 3) $\int\sin 7x\sin 3xdx$.

25*. 1) $\int\frac{x}{x+1}dx$; 2) $\int\frac{dx}{x^2-7x+12}$; 3) $\int\frac{(x-3)dx}{x^2-4x+3}$; 4) $\frac{(x+4)dx}{x^2-16}$.

26. 1) $\int\frac{x^5+x^3-2}{x^2+1}dx$; 2) $\frac{x^2-1}{x^2+1}dx$; 3) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$;

4) $\frac{dx}{1-\cos 2x}$; 5) $\int\frac{dx}{4(x^2-4)}$; 6) $\int(1-2\sin^2 5x)dx$.

27. 1) $\int(x^3-1)^4x^2dx$; 2) $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^3}$; 3) $\int\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^3 x}dx$;

4) $\int\frac{\mathrm{ctg}x}{\sin^2 x}dx$; 5) $\int\sin^3 xdx$; 6) $\int\cos^3 xdx$.

28*. 1) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 2) $\int x\cdot\sqrt{x-4}dx$; 3) $\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x+1}}$;

4) $\int(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}^4x)dx$; 5) $\int(\mathrm{ctg}^2x+\mathrm{ctg}^4x)dx$.

Для заданной функции $f(x)$ найдите такую первообразную, график которой проходит через указанную точку $A(x;y)$ (**29–30**):

29. 1) $f(x)=\frac{3}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}$, $A(\pi; 4)$;

2) $f(x)=\frac{3}{5}\cdot\sin 5x$, $A(\frac{\pi}{2};3)$;

3) $f(x)=2\sin 5x+2\cos\frac{x}{2}$, $A(\frac{\pi}{3};0)$.

30. 1) $f(x)=3x^2-2x+8$, $A(1; 9)$;

2) $f(x)=4x^3-3x^2+2x+1$, $A(-1; 4)$;

3) $f(x)=5x^4+3x^2+2$, $A(-2; 1)$.

31. Вычислить интеграл:

1) $\int(x^2-1)(x+2)dx$; 2) $\int(x+2)(x^2-9)dx$; 3) $\int(x^2+1)(x^3-1)dx$;

4) $\int\frac{1-4x^2+\sqrt{1-2x}}{1-2x}dx$; 5) $\int\frac{9x^2-4-\sqrt{3x+2}}{3x+2}dx$;

6) $\int(e^{5-2x}-2^x)dx$; 7) $\int(e^{3x+2}+10^x)dx$.

32. Вычислить интеграл:

1) $\int\frac{dx}{x^2+6x+10}$; 2) $\int\frac{dx}{x^2-4x+5}$; 3) $\int\frac{dx}{x^2+10x+26}$.

Образец: Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$.

△ $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{1+(x+2)^2}$; Пусть $x+2=u$, тогда $1+(x+2)^2=1+u^2$, $x'=u'$. Из пунктов 14–15 таблицы интегралов, имеем

$$I=\int\frac{du}{1+u^2}=\operatorname{arctg}u+C=\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

Проверка:

$$(\operatorname{arctg}(x+2)+C)'=(\operatorname{arctg}(x+2))'+C'=\frac{1}{1+(x+2)^2}+0=$$
$$=\frac{1}{1+(x+2)^2}=\frac{1}{x^2+4x+5}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}(x+2)+C$.▲

Приведём также правило *интегрирования по частям.*

Правило 3*. Если на некотором интервале X функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют непрерывные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, то справедлива формула

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \qquad (1)$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям.

Доказательство формулы следует из правила дифференцирования произведения функций $f(x)$ и $g(x)$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ и } \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

Примечание. Для использования этого правила: 1) Подынтегральная функция представляется в виде произведения $f(x)$ и $g'(x)$; 2) *выражения* $g'(x)$ и $g(x)f'(x)$ подбираются таким образом, чтобы интеграл в правой части формулы вычислялся непосредственно.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int x \cdot e^x dx$.

△ Подберём $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$. Поэтому

$g(x) = \int g'(x)dx = \int e^x dx = e^x$, $f'(x) = 1$. Согласно (1),

$\int xe^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C.$

Поэтому $\int xe^x dx = e^x \cdot (x-1) + C.$

Ответ: $e^x(x-1)+C$. ▲

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \ln x dx$.

△ Представим подынтегральную функцию $\ln x$ в виде произведения функций $f(x)=\ln x$ и $g'(x)=1$. Поэтому: $\ln x = f(x) \cdot g'(x)$.

Тогда $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \int 1 \cdot dx = x + C.$

Согласно формуле (1),

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C =$$

$$= x(\ln x - 1) + C = x \cdot (\ln x - \ln e) + C = x \cdot \ln \frac{x}{e} + C.$$

Значит, $\int \ln x dx = x \cdot \ln \frac{x}{e} + C.$

Проверка:

$$(x\ln\frac{x}{e}+C)'=(x\ln\frac{x}{e})'+C'=x'\cdot\ln\frac{x}{e}+x(\ln\frac{x}{e})'+0=$$

$$=\ln\frac{x}{e}+x\cdot\frac{e}{x}\cdot\frac{1}{e}=\ln x-\ln e+1=\ln x-1+1=\ln x.$$

Ответ: $x\cdot\ln\frac{x}{e}+C.$ ▲

Пример 3. Для нахождения интеграла удобно положить $\int x\cos xdx$.

△ В этом случае $f(x)=x,\ g'(x)=\cos x\ f'(x)=1,\ g(x)=\int\cos xdx=\sin x$ (здесь мы взяли первообразную без постоянной С). Согласно формуле интегрирования по частям,

$$\int x\cos xdx=x\cdot\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C.$$

Ответ: $x\ \sin x+\cos x+C.$ ▲

Вычислить интегралы (**33–35**):

33*. 1) $\int x\sin xdx$; | 2) $\int x^2\cos xdx$; | 3) $\int x\ln xdx$; | 4) $\int 2x\ln xdx$.

34*. 1) $\int x\cos 2xdx$; | 2) $\int x\sin 3xdx$; | 3) $\int x\sin\frac{x}{3}dx$; | 4) $\int x\cos\frac{x}{4}dx$.

35*. 1) $\int 2^x\cdot xdx$; | 2) $\int 3^x\cdot xdx$; | 3) $\int 5^x\cdot xdx$; | 4) $\int \mathrm{tg}^2 nxdx$;

5) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; 6) $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$; 7) $\int(3^x+4^x)^2dx$;

8) $\int(e^{-x}+e^{-2x})dx$; 9) $\int\frac{e^{4x}-1}{e^{2x}-1}dx$; 10) $\int\frac{e^x dx}{\pi+e^x}$;

11) $\int x\cdot e^{-x^2}dx$; 12) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 13) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$.

44–46 ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Фигура, изображённая на рисунке 2, называется *криволинейной трапецией*. Криволинейная трапеция – фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – отрезком $[a;\ b]$, а по бокам – отрезками прямых $x=a,\ x=b$. Отрезок $[a;\ b]$ называется основанием криволинейной трапеции.

Возникает вопрос: «Как вычислить площадь криволинейной трапеции?»

Обозначим эту площадь через S. Оказывается, площадь S можно вычислить, опираясь на первообразную для функции $f(x)$. Приведём соответствующие рассуждения.

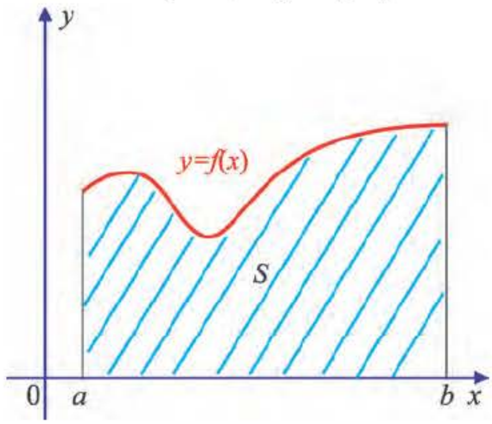


Рисунок 2.

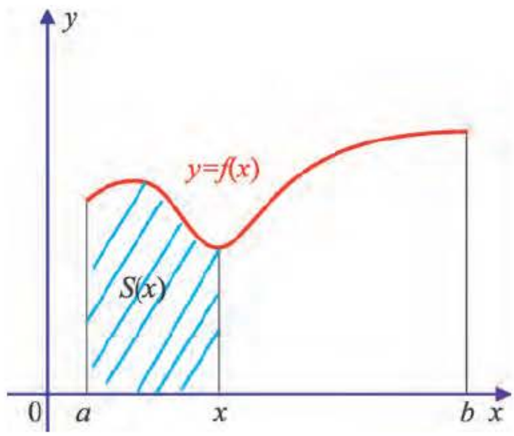


Рисунок 3.

Обозначим площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;\ x]$ через $S(x)$ (рисунок 3) . Точка x – произвольная точка из отрезка $[a;\ b]$. В случае $x=a$ отрезок $[a;\ x]$ превращается в точку, поэтому $S(a)=0$; а при $x=b$ $S(b) = S$.

Покажем, что функция $S(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то есть $S'(x) = f(x)$.

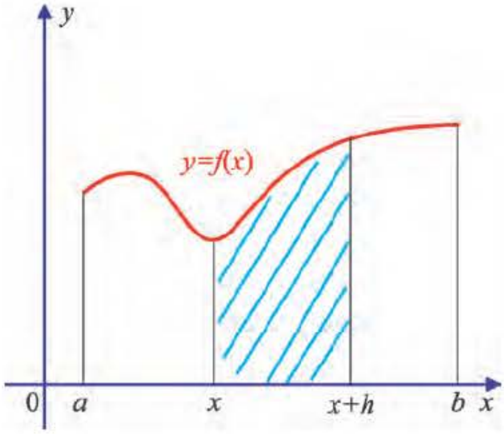


Рисунок 4.

△ Рассмотрим разность $S(x+h) - S(x)$, где $h>0$ (случай $h<0$ рассматривается аналогично). Эта разность равна площади криволинейной трапеции с основанием $[x;\ x+h]$ (рисунок 4). Отметим, что при достаточно малых h эта площадь приблизительно равна $f(x)\cdot h$,

то есть $S(x+h)-S(x) \approx f(x)\cdot h$. Значит, $\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} \approx f(x)$.

По определению производной, левая часть этого приближенного равенства при $h \to 0$ стремится к $S'(x)$. Поэтому при $h \to 0$ получим равенство $S'(x)=f(x)$. Поэтому $S(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. ▲

Первообразная $S(x)$ отличается от произвольной первообразной $F(x)$ на постоянную величину, то есть

$$F(x)=S(x)+C.$$

Положим в этом равенстве $x=a$ получим $F(a) = S(a)+C$ и $S(a) = 0$. Отсюда следует, что $C=F(a)$. Тогда равенство (1) можно записать в виде: $S(x)=F(x)-F(a)$. Положим в этом равенстве $x=b$, получим $S(b)=F(b)-F(a)$.

Значит, *площадь криволинейной трапеции* (рисунок 2) можно вычислить по формуле:

$$S=F(b)-F(a), \qquad (2)$$

где $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$.

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к нахождению первообразной функции $F(x)$ для функции $f(x)$, то есть к интегрированию функции $f(x)$.

Разность $F(b) - F(a)$ называется определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается так: $\int_a^b f(x)dx$

(читается как «интеграл от а до б от эф икс де икс»).

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Формула (3) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Из (2) и (3) имеем:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

Обычно при вычислении определенного интеграла принято обозначение:

$F(b)–F(a)=F(x)\Big|_a^b$. В этом случае:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{5}$$

Приведём *дополнительные сведения.*

Задачу нахождения криволинейной фигуры свели к вычислению определённого интеграла. Рассмотрим непрерывную функцию, определённую на отрезке $[a; b]$. Разобьем этот отрезок точками $a=x_0$, x_1.., x_{n-1}, $x_n= b$ на равные отрезки $[x_k; x_{k+1}]$ (k=0, 1, ... n–1), и на каждом из этих отрезков $[x_k; x_{k+1}]$ отметим произвольную точку ξ_k. Умножим длину $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ отрезка $[x_k; x_{k+1}]$ на значение $f(\xi_k)$ заданной функции $f(x)$ в точке ξ_k и составим сумму

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_{k-1})\Delta_{n-1} \tag{6}$$

Видно, что каждое слагаемое в этой сумме есть площадь прямоугольника с основанием $f(\xi_k)$ и высотой S_n. Тогда сумма S приближенно равна площади криволинейной трапеции S : $S_n \approx S$ (рисунок 5).

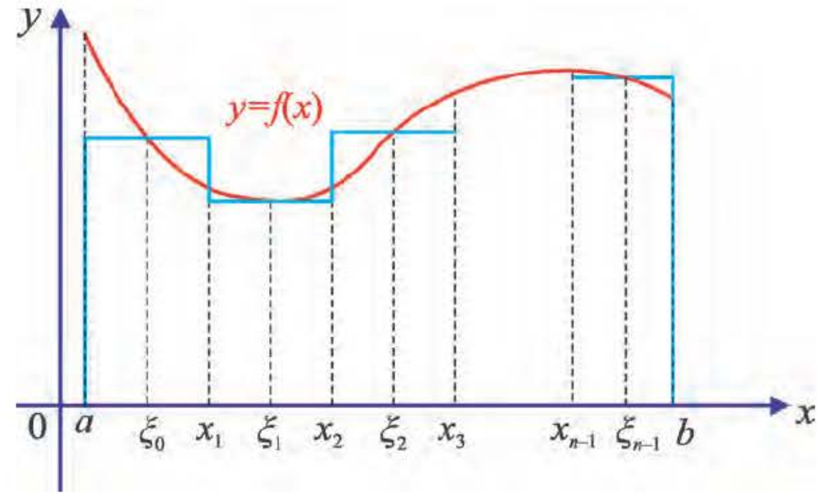


Рисунок 5.

Сумма (6) называется *интегральной суммой функции* $f(x)$ по отрезку $[a,\ b]$. Пусть при стремлении n к бесконечности ($n \to \infty$), Δx_k стремится к нулю. Тогда интегральная сумма S_n стремится к некоторому числу. Вот это число называется *определенным интегралом от функции* $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

Пример 1. Найдите площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 6.

△ Согласно формуле (4) $S = \int_1^4 x^2 dx$. Вычислим это значение по формуле Ньютона-Лейбница (3). Очевидно, что функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ одна из первообразных для функции $f(x)=x^2$. Значит,

$$S = \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}(4^3 - 1^3) = \frac{1}{3} \cdot 63 = 21$$ (кв. единиц). ▲

Ответ: $S = 21$ (кв. единиц).

Пример 2. Найдите площадь заштрихованной фигуры на рисунке 7.

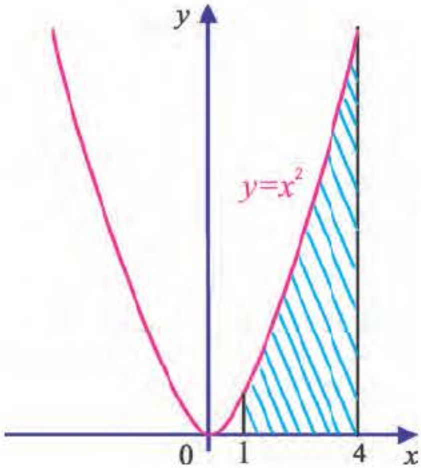


Рисунок 6.

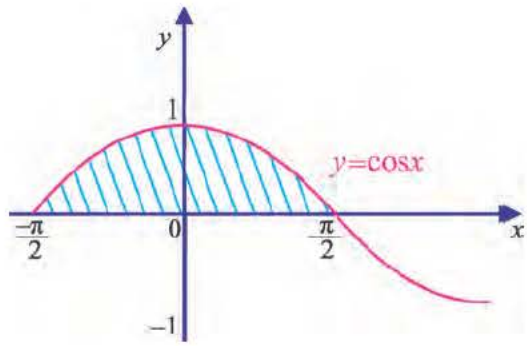


Рисунок 7.

Δ По формуле Ньютона-Лейбница и формуле (5):

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(\frac{-\pi}{2}) = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2 \text{ (кв.единиц).}$$

Ответ: 2 (кв.единиц). ▲

Пример 3. Вычислить определённый интеграл $\int_0^{\pi} \cos x dx$.

Δ По формуле Ньютона-Лейбница и формуле (5):

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0.$$

Ответ: 0. ▲

Пример 4. Вычислить определённый интеграл $\int_{-1}^{2} (2x^2 - 3x + 4) dx$.

Δ По формуле Ньютона-Лейбница и формуле (5):

$$\int_{-1}^{2} (2x^2 - 3x + 4) dx = (\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x)\Big|_{-1}^{2} = \frac{22}{3} - (-\frac{37}{6}) = \frac{81}{6} = 13,5.$$

Ответ: 13,5. ▲

Пример 5. Вычислить определённый интеграл $S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2(3x+\frac{\pi}{6})\,dx.$

△ Сначала найдём неопределённый интеграл:

$$\int\sin^2(3x+\frac{\pi}{6})dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos(6x+\frac{\pi}{3}))dx=\frac{1}{2}\cdot(x-\frac{1}{6}\sin(6x+\frac{\pi}{3})).$$

Значит $S=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}\sin(6x+\frac{\pi}{3}))\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{6}\sin(2\pi+\frac{\pi}{3}))-\frac{1}{2}(0-\frac{1}{6}\sin\frac{\pi}{3})=$

$=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{12}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{12}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}.$ *Ответ:* $S=\frac{\pi}{6}.$ ▲

Пример 6. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_2^6\sqrt{2x-3}\,dx.$

△ Сначала найдём неопределённый интеграл:

Согласно таблице интегралов $\int\sqrt{2x-3}dx=\frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$ Значит

$$\int\limits_2^6\sqrt{2x-3}dx=\frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^6=\frac{1}{3}\cdot\left((2\cdot6-3)^{\frac{3}{2}}-(2\cdot2-3)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}\cdot(27-1)=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}.$$

Ответ: $8\frac{2}{3}$. ▲

Определённый интеграл обладает следующими свойствами:

1. $\int\limits_a^a f(x)dx=0.$ Действительно, $\int\limits_a^a f(x)dx=F(a)-F(a)=0.$

2. $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx.$

Δ $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a);\ \int\limits_b^a f(x)dx=F(a)-F(b)=-\big(F(b)-F(a)\big).$

Значит, $-\int\limits_b^a f(x)dx=F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(x)dx.$ ▲

3. Пусть a, b, c – действительные числа. Тогда

$\int_b^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (свойство аддитивности определённого интеграла).

4. Пусть $f(x)$, $x \in R$, – четная функция, тогда $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$

5. Если $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, тогда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

6. Если $f(x) < g(x)$, $x \in [a,b]$, тогда $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

? Вопросы и задания

1. Дайте понятие об определённом интеграле.

2. Приведите задачу о нахождении площади криволинейной трапеции. Объясните на примерах.

3. Расскажите о формуле Ньютона-Лейбница. В чём заключается её роль?

4. Приведите свойства определённого интеграла. Поясните их на примерах.

Упражнения

Вычислить определённый интеграл **(36-41):**

36. 1) $\int_0^2 3x^2dx$; 2) $\int_0^2 2xdx$; 3) $\int_{-1}^4 5xdx$; 4) $\int_1^2 8 \cdot x^3dx$;

5) $\int_1^e \frac{1}{x}dx$; 6) $\int_3^4 \frac{1}{x^2}dx$; 7) $\int_1^2 \frac{1}{x^4}dx$; 8) $\int_0^1 \sqrt{2x}dx$;

9) $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$; 10) $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 11) $\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$; 12) $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$.

37. 1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2x+\frac{\pi}{4})dx$; 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2xdx$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \cos 3xdx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)dx$.

38. 1) $\int\limits_0^{\ln 2} e^{2x}dx;$ 2) $\int\limits_0^{2} e^{4x}dx;$ 3) $\int\limits_1^{3} (e^{2x}-e^{x})dx.$

39. 1) $\int\limits_{-1}^{1} (x^2+3x))(x-1)dx;$ 2) $\int\limits_{-1}^{0} (x+2)(x^2-3)dx;$

3) $\int\limits_1^{3} (x+\frac{1}{x})^2 dx;$ 4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}(1-\frac{1}{x})dx.$

40*. 1) $\int\limits_1^{6} \frac{dx}{\sqrt{3x-2}};$ 2) $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{x+1}};$ 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin^4 2x+\cos^4 2x)dx.$

41*. 1) $\int\limits_1^{5} x^2\cdot\sqrt{x-1}dx;$ 2) $\int\limits_1^{5} \frac{x^2-6x+10}{x-3}dx;$ 3) $\int\limits_0^{1} \frac{x^2+2x+4}{x+1}dx.$

42*. 1) Найдите a и b такие, что функция $f(x)=a\cdot 2^x+b$ удовлетворяет условиям $f'(1)=2,\ \int\limits_0^{3} f(x)dx=7$.

2) Пусть выполнено неравенство $\int\limits_1^{b} (b-4x)dx \ge 6-5b\cdot$

Найдите все $b>1$.

43*. 1) Пусть выполнено неравенство $\int\limits_1^{2} (b^2+(4-4b)x+4x^3)dx \le 12$

Найдите все b.

2) Для каких $a>0$ выполнено неравенство $\int\limits_{-a}^{a} e^x dx > \frac{3}{2}$?

44. Выберите функции $f(x)$ такие, что при всех значениях a выполнены равенства:

1) $\int\limits_0^{a} f(x)dx = 2a^2-3a;$ 2) $\int\limits_0^{a} f(x)dx = 4a-a^2;$

3) $\int\limits_0^{a} f(x)dx = \frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2;$ 4) $\int\limits_0^{a} f(x)dx = a^2+a+\sin a$.

Вычислить определённый интеграл (**45–46**):

45. 1) $\int\limits_0^1 (e^{-x}+1)^2\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1} 10^x \cdot 2^{-x}\,dx$; 3) $\int\limits_0^1 (e^{-x}-1)^2\,dx$;

4) $\int\limits_{-3}^{-1} 3^{-x}6^x\,dx$; 5) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-3x}\,dx$; 6) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\,dx$.

46*. 1) $\int\limits_0^1 \frac{2^x+3^x}{6^{x+1}}\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{2^{x-1}+5^{x-1}}{10^x}\,dx$; 3) $\int\limits_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$;

4) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{e+2}} \frac{2x\,dx}{x^2-2}$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{3^x+4^x}{12^x}\,dx$; 6) $\int\limits_0^2 4^{-x}\cdot 8^x\,dx$.

47. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a,\ x=b$, осью Ox и графиком функции $y=f(x)$. Приведите схематический рисунок:

1) $a=1,\quad b=2,\ f(x)=x^3$; 2) $a=2,\ b=4,\ f(x)=x^2$;

3) $a=-2,\ b=1,\ f(x)=x^2+2$; 4) $a=1,\ b=2,\ f(x)=x^3+2$;

5) $a=\frac{\pi}{3},\ b=\frac{2\pi}{3},\ f(x)=\sin x$; 6) $a=\frac{\pi}{4},\ b=\frac{\pi}{2},\ f(x)=\cos x$.

48. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox и заданной параболой:

1) $y=9-x^2$; 2) $y=16-x^2$; 3) $y=-x^2+5x-6$;

4) $y=-x^2+7x-10$; 5) $y=-x^2+4x$; 6) $y=-x^2-3x$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми. Приведите схематический рисунок (**49–50**).

49. 1) $y=-x^2+2x,\ y=0$; 2) $y=-x^2+3x+18,\ y=0$;

3) $y=2x^2+1,\ y=0,\ x=-1,\ x=1$; 4) $y=-x^2+2x,\ y=x$.

50. 1) $y=-2x^2+7x,\ y=3{,}5-x$; 2) $y=x^2,\ y=0,\ x=3$;

3) $y=x^2,\ y=0,\ y=-x+2$; 4) $y=2\sqrt{x},\ y=0,\ x=1,\ x=4$;

5) $y=\frac{1}{a}\cdot x^2, y=a\cdot\sqrt{x}$; 6) $y=2^x, y=2, x=0$;

7) $y=|\lg x|, y=0, y=2, x=0$.

Типовое контрольное задание
Вариант I

1. Найдите все первообразные для функции $f(x)=\frac{x^3}{2}-\cos 3x$.

2. Пусть $F(\frac{3}{2})=1$. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$f(x)=\frac{6}{(4-3x)^2}$.

3. Вычислите: $\int\limits_{-1}^{2}(x^2-6x+9)dx.$

4. Вычислите: $\int\limits_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{3}dx.$

5. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми Ox, $x=-1$ и $x=2$ осью Ox и параболой $y=9-x^2$.

Вариант II

1. Найдите все первообразные для функции $f(x)=\frac{x^4}{3}+\sin 4x$.

2. Пусть $F\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$f(x)=\frac{3}{(2-5x)^3}$.

3. Вычислите: $\int\limits_{-3}^{1}(x^2+7x-8)dx$

4. Вычислите: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx$

5. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми Ox, $x=-2$ и $x=3$ осью Ox и параболой $y=x^2-1$.

Ответы
Глава I

1. *а*) Частота пульса – величина, показывающая, сколько раз в минуту бьётся сердце. Значит у Мадины сердце бьется 67 раз в минуту . *б*)4020. **2.** *ф*)$\approx 0{,}00150 \frac{ошибок}{мин}$. Качество повысилось. *б*)$\approx 0{,}15$. **3.** Маруф качественно выполнил работу. **4.** *а)* $\approx 0{,}000177 \frac{мм}{км}$. **5.** $89 \frac{км}{час}$ или $89 \frac{м}{с}$. **6.** а) $0{,}1 \frac{м}{с}$; б) $0{,}9 \frac{м}{с}$ в) $0{,}5 \frac{м}{с}$. **7.** а) $3{,}1 \frac{штук}{г}$; $4{,}22 \frac{штук}{г}$; б) При повышении дозы с 2 грамм до 8 грамм количество . **8.** а) 7; б) 7; в) 11; г) 16; д) 0; е) 5. **9.** а) 5; б) 7; в) с. **10.** а) –2; б) 7; в) –1; г) 1. **11.** а) –3; б) –5; в) –1 г) 6; д) – 4; е) –8; ё) 1; ж) 2; з) 5. **13.** а) $3x^2$ б) $-\frac{1}{x^2}$ в) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; г) 0. **15.** а) 2; б) $6x + 5$; в) $6x^2+8x+6$. **16*.** а) $f'(x)=a$; б) $f'(x)=2ax + b$; в) $f'(x)=3ax^2 + 2bx + c$. **20.** 1) $4x^3$; 2) $-2x^{-3}$; 3) $-3x^{-4}$. **21.** 2) $-x^{-2}+1$; 4) $4x^3+3x^2+2x-1+x^{-2}+2x^{-3}$. **22.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)}$. **23.** 2) 53,25. **24.** 2) –3; 4) 2. **25.** 2) $-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{4}$; 4) $2x-\frac{2}{x^3}$. **26.** 2) $3(x+2)^2$; 4) $2x$.

27. 3) $-\frac{2x^9+4x^3}{(x^6-1)^2}$; 4) $-\frac{1}{(x-1)^2}$; 6) $4x^3 - 4$; 8) $7x^6 +3x^2-3x^{-4}-7x^{-8}$. **28.** 2) 0; 4) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 6) $\frac{1}{x\ln 2}$; 8) $1+\ln x$; 10) $2e^x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$. **29.** 2) $2e^x\cos x$; 4) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 6) $5+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 8) $3(2+x)^2$. **30.** 2) 11. **31.** 2) 0 . **32.** 2) $-\frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $-\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 6) $2x\sin x+x^2\cdot\cos x$; 8) $x\cos x$. **33.** 2) 1. **34.** 2) $n\pi$, $n\in z$; 4) 1. **35.** 1) $\frac{1}{x^2}-1$; 2) $4x^2-1$. **36.** 2) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; 4) $\frac{x+2}{x}$. **37.** 2) x^4 ; 4) x^2-1. **38.** 2) x^3+3x^2+3x+1; 4) $x^6 + 1$.

39. x^2-2x. **43.** 2) $e^{\sin x}\cos x$; 4) $\sin 2x$; 6) $\frac{4}{4x-1}$; 8) $20(2x-1)^9$. **44.** 3) $-\mathrm{tg}x$; 8) $-30x^2\cos^{29}x\cdot\sin x+2x\cos^{30}x$; 9) $\frac{5\mathrm{ctg}x}{x}-\frac{5\ln x}{\sin^2 x}$. **45.** 2) $y=3x-4$; $y=3x-4$; $y=3x-4$. 4) $y=-x-2$; $y=8x+16$; $y=-4x$. **46.** 2) $y=7x-6$. **47.** 2) не существует; 4) 0 и $\frac{2}{3}$; 6) 0 и $\frac{3}{4}$. **48.** 1) $y=-x$; $y=-x+21$; $y=-x+1$.

49. 2) 0,1; 0,331. **50.** 2) а) 0,2718; б) 9,06. 4) а) 0,938127; б) 31,2709. **51.** 2) а) 0; б) 0. 4) а) 0,119401; б) 11,9401 . **52.** 1) 4; 2) –7; 3) 6; 4) 19/28; 5) 0. **53.** 2) 29; 4) $32x–3$; 6)$18–2x$; 8) $48x^2+10x–2$. **54.** 1) а) 15; б) 15; в) 15; г) 15; 4) а) –29; б) 12; в) 5; г) –1. **55.** 2) $3(x+2)^2$; 4) $1–x^{-2}$. **56.** 1) 12; 2) 3. **57.** 15 м/сек. **58.** 3) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}+\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{1}{x\ln 3}$; 10) $7^x x^7\ln 7+7^x\cdot 7x^6$; 12) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x$;

14) $8–2^x$. **59.** 2) 4; 4) 2. **60.** 2) Ø. **61.** 1 и 2 . **62.** 2) $–2x^{-3}–1$. **63.** 2) 2,75.

64. 2) $\frac{x^2+16x-24}{(x+8)^2}$; 4) $6x^2+8x+5$; 6) $14x+12$. **65.** 2) $\frac{-2x^7-4x^5-5x^4+21x^2+7}{(x^5+7)^2}$.

66. 2) $e^{5x}(4\cos x–6\sin x)$; 4) $\frac{1-2\ln x}{x^3}$. **67.** 2) –4; 4) $-\frac{1}{\sin^2 1}-\frac{1}{20}$.

68. 1) $2x\sin x+x^2\cos x$; 2) $-\frac{\operatorname{tg}x}{\ln 15}$; 4) $\frac{35\operatorname{tg}^{34}x}{\cos^2 x}$; 8) $(2x–10)\ln\cos x–(x^2–10x+7)\operatorname{tg}x$.

69. 3) возрастает: $(–\infty; –3) \cup (3; –\infty)$ убывает: $(–3;3)$.
4) возрастает: $(–\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; убывает: Ø.
6) возрастает: $(-\infty; \sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$; убывает: $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$.
8) возрастает: $(–\infty; 0)$; убывает: $(0; +\infty)$.
9) возрастает: $(–1; 0) \cup (1; +\infty)$; убывает: $(–\infty; –1) \cup (1; +\infty)$.
10) возрастает: $(2; +\infty)$; убывает: $(–\infty; 2)$.
14) возрастает: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$; убывает: Ø.

70. 2) –3; 3 . 4) 0. 6) Ø. 8) 0; –1.

71. 2) локальный минимум $x=4$; локального максимума нет.
4) локальный минимум $x=5$; локальный максимум $x=–5$.
6) локальный минимум $x=0,75$; локального максимума нет.
8) локальный минимум $x=2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$; локальный максимум $x=\pi+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.

72. 2) возрастает $(–1; 1)$; убывает: $(–\infty; –1) \cup (1; +\infty)$.
4) возрастает: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi)\mathbb{Z}$; убывает: $(-\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{3\pi}{2}+2n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$;
6) возрастает: Ø ; убывает: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$.

73. 2) наибольшее значение: 57; наименьшее значение: –55.
4) наибольшее значение: 84; наименьшее значение: $-\frac{28}{9}$.

76. 5625м^2. **80.** 80 м. **83.** 1) 5 сек; 2) 250 м/сек; 3) $\frac{1875}{4}$ м.

87. 1) 4 м³; 2) 5324 м³; 3) 407 $\frac{\text{м}^3}{\text{мин}}$;

89. 1) 30; 2) 1800000 сум.

91. г) 24,52, –0,1; д) 40,52, 9,86. **93.** д) 2,0004. **94.** д) 0,9302.

95. г) 0,526. **96.** г) 0,1247. **112.** 1) существует 13; равен 13. 3) не существует; равен 5. 5) не существует; равен $\frac{11}{6}$.

113. 2) $y=13x+4; y=13x+4; y=13x+4$. **114.** 1) не существует. **115.** 3) не существует.

117. 1) -1; 2) 0; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 75; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{3}{16}$; 8) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 9) $-\sqrt{2}$.

118. 1) 19; 10; 2) 27;30; 3) 77; 30; 4) 0; –8.

119. 1) 1; 2) 0; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 75; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{3}{16}$; 8) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 9) $\sqrt{2}$; 10) 0.

120. 1) 10; 6. 2) 15; 18. 3) 225; 80.

121. 1) $-2x+1$; 2) $\cos x+\sin x$; 4) $4^x\ln 4-\cos x$; 6) $\frac{1}{x}-20x+1$. **122.** 1) $4x^3$; 3) $1+\frac{20}{x^2}$; 6) $e^x(\sin x+\cos x)$; 8) $20\sin x+2(10x-1)\cos x$.

123. 1) $\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$; 0; 2) 3; 3; 3) $-2\pi+1$; $\pi+1$. 4) $-\pi$; $\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 1; 0; 6) 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $1-\frac{\pi^3}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi^3}{16}$. 8) 3; $-3\sqrt{2}$.

124. 1) 12; 2)72. **126.** 1) 0; 2) 600 000. **127.** 2) $-\sin 2x$.

128. 2) возрастает:: $(-\infty; +\infty)$; убывает: Ø.
4) возрастает:: Ø; убывает: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
6) возрастает:: $(-\infty; +\infty)$; убывает: Ø.
8) возрастает:: $(0; +\infty)$; убывает: $(-\infty; 0)$.

129. 2) $\sqrt{\frac{133}{3}}$; $-\sqrt{\frac{133}{3}}$. 4) 0; 6) 3; –3; 8) 0; $-\frac{13}{18}$.

130. 2) локальный минимум: $x=9$. локальный максимум: не существует.

134. 62 500 м².

143. 1) $3e^{3x}$; 2) $e^{\sin x}\cos x$; 3) $3\cos(3x+2)$; 4) $8(2x+1)^3$;

144. 1) e^{8x+4}; 2) e^{8x^2+4x}; 3) $4e^{2x}+2$; 4) $\sqrt{16x+10}$.

145. 1) $10x(x^2+1)^4$; 3) $\frac{5}{2\sqrt{5x-7}}$; 8) $-e^{\sin(\cos x)}\cdot\cos(\cos x)\cdot\sin x$.

146. 1) возрастает: $(-\infty; 0,5)$; убывает: $(0,5; -\infty)$;
3) возрастает: $(-1; 1)$; убывает: $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$.
4) возрастает: $(-\infty; +\infty)$; убывает: Ø.
7) возрастает: $(-\infty; +\infty)$; убывает: Ø.

8) возрастает: $(1; +\infty)$; убывает: $(-\infty; 1)$.

147. 1) стационарная точка: 1 и 3; локальный максимум: 0; локальный минимум: –4.

Часть II

2. 2) x^6+C; 4) $x^{\frac{3}{2}}+C$; 6) $\sin x+C$; 8) $\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **3.** 2) $\frac{\pi^x}{\ln\pi}+C$; 4) $\frac{a^x}{\ln a}+C$; 6) $\frac{e^{\pi x}}{\pi}+C$. **4.** 4) $\frac{1}{a}\ln x+C$. **5.** 4) $\frac{1}{5}\sin 5x+C$; 6) $\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

6. 4) $\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$. **7.** 2) $-\frac{1}{3}x^3+x^2+5x+2$; 4) $\sin x+4$. **8.** 1) $2x^2+8x+11$; 2) $-\frac{x^2}{2}+3x+2{,}5$; 3) $\frac{9}{4}x^2+9x+15{,}8$; 4) $x^2-6x+10$. **10.** 1) $\frac{8}{x}-2x+4$; 2) $\frac{9}{x^2}+2x-3$; 3) x^3-x+6; 4) x^5+7x+1. **11.** 1) $\frac{1}{4}\cdot(3x-2)^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{5}\cdot(4x+5)^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{5}$; 3) $\frac{1}{8}\cdot(7x-5)^{\frac{8}{7}}+\frac{7}{8}$; 4) $\frac{1}{k+1}\cdot(kx+b)^{\frac{k+1}{k}}+\frac{k}{k+1}$.

12. 1) $5\ln|x-2|+7$; 2) $3\ln|x+1|+1$; 3) $\sin x+7$; 4) $-\cos x+9$.

14. 2) $\frac{1}{5}\cdot\sin 5x+\frac{3}{5}$; 4) $-3\cos\frac{x}{3}+6$. **15.** 1) x^3-4; 2) x^4-15. **16.** 2) x^8+x^5; 4) $-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^4}$. **17.** 2) $-7\cos x+4\sin x$; 4) $5e^x+2\sin x$. **18.** 2) $\frac{1}{5}(x+5)^5$; 4) $9\cdot(x+1)^{\frac{2}{3}}$; 6) $-2\cos(x-3)-4\ln|x-2|$. **19.** 2) $-\frac{1}{7}\cdot\cos(7x-6)+C$; 4) $-\frac{7}{5}\cos(\frac{5x}{7}-2)+C$; 6) $-\frac{1}{2}\cdot e^{3-2x}+C$; **20.** 2) $\frac{1}{15}\cdot(3x+2)^5+\frac{1}{5}x^{-5}+C$; $4x^2+3\operatorname{ctg}x+6x+C$. **21.** 2) $\frac{1}{5}\sin 5x+3\frac{4}{5}$; 4) $x^4-\sqrt{x-1}-15$. **22.** 2) $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}\sin 3x+4x+C$; 4) $x^4+3\sin\frac{x}{3}-3\cdot\cos\frac{x}{3}+C$.

23. 2) $\frac{-1}{4}\cos 4x+C$; **24.** 1) $\frac{-1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 4x$; **25.** 2) $\ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+C$, 4) $\ln|x-4|+C$.

26. 2) $x-\operatorname{arctg}x+C$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C$. **27.** 2) $-\frac{1}{4(1+x^2)^2}+C$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2x+C$.

28. 2) $\frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}}+C$. 4) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+C$. **29.** 2) $-\frac{3}{25}\cos 5x+3$.

31. 4) $x+x^2-\sqrt{1-2x}+C$. **33.** 1) $\sin x-x\cos x+C$; 2) $x^2\cdot\sin x-2\sin x+2x\cos x+C$;

3) $\frac{1}{2}\cdot x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$; 4) $x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

34. 1) $\frac{1}{2}\cdot(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)+C$; 3) $9\sin\frac{x}{3}-3x\cdot\cos\frac{x}{3}+C$. **36.** 4) 30. **37.** 4) $\frac{1}{4}$.

38. 2) $\frac{1}{4}\cdot(e^8-1)$. **39.** $\frac{1}{8}$. **40.** 2) 2. **41.** 1,5+ln2. **42.** 1) $a=\frac{1}{\ln 2}$, $b=\frac{7(\ln^2 2-1)}{3\ln^2 2}$;

2) $b=2$. **43.** 1) $b=3$; 2) $a>\ln 2$. **44.** 1) $f(x)=4x-3$; 2) $f(x)=4-2x$; 3) $f(x)=x^2-3x$;

4) $f(x)=1+2x+\cos x$. **45.** 2) $\frac{4}{5\ln 5}$; 6) 8. **46.** 2) $\frac{0,4}{\ln 5}+\frac{0,1}{\ln 2}$; 4) 1. **47.** 2) $\frac{56}{3}$; 4) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

48. 2) $85\frac{1}{3}$. **49.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 121,5; 3) $\frac{10}{3}$; 4) $\frac{1}{6}$. **50.** 1) 9; 2) 9; 3) 4,5;

Использованная и рекомендованная литература

1. А. Алимов и др. Алгебра и начала математического анализа, учебник для 10–11 класса. Учебник для базового и профильного образования, Москва, «Просвещение», 2016.
2. Mai Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. А.Н. Колмогоров и др., Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10–11 классов. Москва, «Просвещение», 2018.
4. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа, часть 2 учебное пособие, Ташкент, «Ilm ziyo», 2016.
5. A.U. Abduhamidov va boshqalar. Algebra va matematik analiz asoslari, 1- qism, Toshkent, “O’qituvchi”, 2012.
6. Н.П. Филичева. Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. «Рязань». 2009.
7. М.И. Исроилов. Ҳисоблаш методлари. Тошкент, «Ўқитувчи», 1988.
8. Г.К. Муравин и др. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, «Дрофа», 2006.
9. Алгебра. Учебное пособие для 9–10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, «Просвещение», 2004.
10. Г.П. Бевз и др., Алгебра и начала анализа. Учебник для 11 класса. Киев, 2011.
11. http://www.ams.org/mathweb/ – Internetda matematika (ingliz tilida).
12. «Математика в школе» jurnali.
13. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001- yildan boshlab chiqa boshlagan).
14. M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2016.
15. Matematikadan qo’llanma, I va II qismlar. O’qituvchilar uchun qo’llanma. Prof. TA. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, “O’qituvchi”, 1979.
16. M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev. O’quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, “O’qituvchi”, 1993.
17. http://www.uzedu.uz - Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
18. http://www.eduportal.uz - Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
19. http://www.problems.ru - Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida). http://matholymp.zn.uz - O’zbekistonda va dunyoda matematik olimpiadalar.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ

Глава II . ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

ГЕОМЕТРИЯ

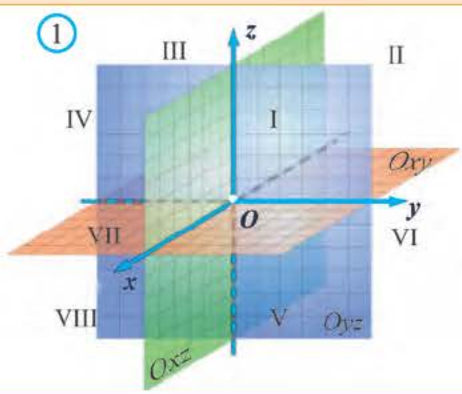
ГЛАВА I. СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ И ВЕКТОРЫ

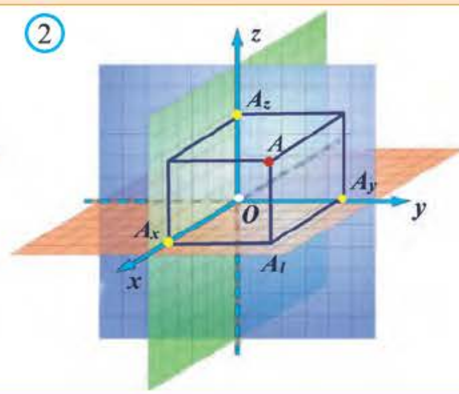
1. СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

1.1. Декартова система координат в пространстве

Вы познакомились с декартовой системой координат на плоскости в предыдущих классах. Систему координат в пространстве введём аналогично тому, как это было сделано на плоскости. Рассмотрим три взаимно перпендикулярных оси Ox, Oy и Oz, пересекающихся в точке O, являющейся началом координат. Через каждую пару этих прямых проведём плоскости Oxy, Oxz и Oyz (рис. 1). Таким образом вводится система координат в пространстве, при этом

точку O – называют *началом координат*,
прямые Ox, Oy и Oz – *осями координат*,
Ox – *ось абсцисс*, Oy – *ось ординат* и Oz – *ось аппликат*,
плоскости Oxy, Oyz и Oxz – *координатными плоскостями*.





Координатные плоскости делят пространство на 8 октант (*получетвертей*) (рис. 1).

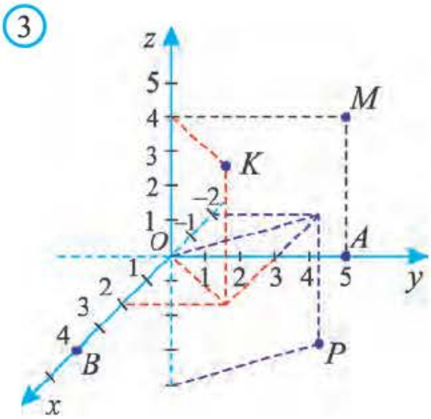
Пусть в пространстве задана произвольная точка A. Через эту точку проведём плоскости, перпендикулярные плоскостям Oxz, Oyz и Oxz (рис. 2). Одна из этих плоскостей пересечёт ось Ox в точке A_x.

Координату A_x на оси Ox называют *координатой x* или *абсциссой точки A*.

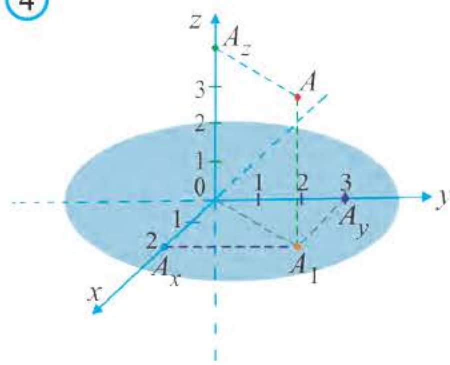
Аналогично определяют *y – координату* (*ординату*) и *z – координату* (*аппликату*) точки A.

Координаты точки A записывают в виде $A(x; y; z)$ или короче $(x; y; z)$. Точки, изображённые на рисунке 3, имеют следующие координаты: $A(0; 5; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $M(0; 5; 4)$, $K(2; 3; 4)$, $P(-2; 3; -4)$.

3



4



Задача 1. Пусть в пространстве в декартовой системе координат задана точка $A(2; 3; 4)$. Где она расположена?

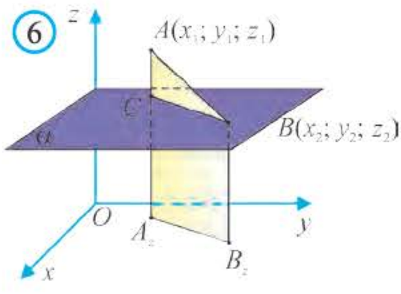
Решение. От начала координат в положительном направлениии осей Ox и Oy отложим отрезки $OA_x = 2$ и $OA_y = 3$ (рис. 4).

Через точку A_x проведём прямую, лежащую в плоскости Oxy и параллельную оси Oy. А через точку A_y проведём прямую, лежащую в плоскости Oxy и параллельную оси Ox. Точку пересечения этих прямых обозначим A_1. Через точку A_1 проведём прямую, перпендикулярную плоскости Oxy и на ней в положительном направлении Oz отложим отрезок $AA_1 = 4$. Тогда точка $A(2; 3; 4)$ и будет искомой точкой. □

Пользуясь системой координат, созданной для современных программируемых станков и автоматизированных роботов, составляются программы, на основе которых обрабатываются металлы (рис. 5).

5

6



1.2. Расстояние между двумя точками

Пусть заданы две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$.

1. Сначала рассмотрим случай, когда прямая AB не параллельна оси Oz (рис. 6). Через точки A и B проведём прямые, параллельные оси Oz. И пусть они пересекают плоскость Oxy в точках A_z и B_z.

Координаты x и y этих точек соответственно равны координатам x и y точек A, B, а координаты z равны 0.

Теперь через точку B проведём плоскость α, параллельную плоскости Oxy. Она пересечёт прямую AA_z в некоторой точке C.

По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Однако $CB = A_zB_z$, $A_zB_z^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ и $AC = |z_2 - z_1|$.

Поэтому $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

2. Пусть отрезок AB параллелен оси Oz, тогда $AB = |z_2 - z_1|$ и, так как $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, мы опять приходим к вышеприведённой формуле.

Следовательно, расстояние между двумя точками *A и B*:

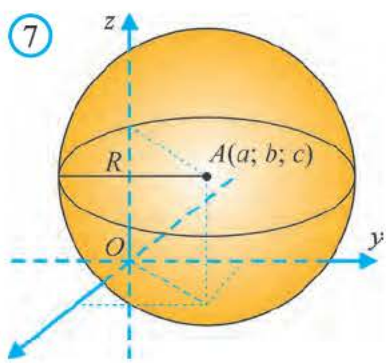
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

Примечание. Формула (1) выражает длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны $a = |x_2 - x_1|$, $b = |y_2 - y_1|$, $c = |z_2 - z_1|$.

Уравнение сферы и шара. Известно, что множество всех точек $M(x; y; z)$, расположенных на расстоянии R от данной точки $A(a; b; c)$ образуют сферу (рис. 7). Тогда по формуле (1) координаты всех точек, расположенных на сфере радиуса R с центром в точке $A(a; b; c)$, удовлетворяют равенству $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

Отсюда, ясно, что неравенство для точек шара радиуса R с центром в точке $A(a; b; c)$ имеет вид: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \le R^2$.

7



Задача 2. Найдите периметр треугольника ABC с вершинами в точках $A(9;\ 3;\ –5)$, $B(2;\ 10;\ –5)$, $C(2;\ 3;\ 2)$.

Решение: $P=AB+AC+BC$ периметр треугольника ABC. Воспользовавшись формулой $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ расстояния между двумя точками, найдём длины сторон треугольника:

$$AB=\sqrt{(2-9)^2+(10-3)^2+(-5+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$

$$AC=\sqrt{(2-9)^2+(3-3)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$

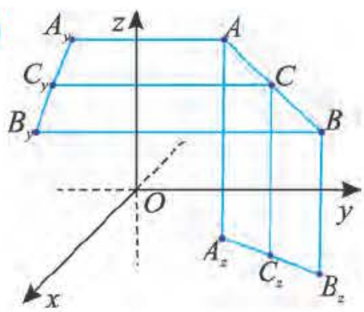
$$BC=\sqrt{(2-2)^2+(3-10)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2}.$$

Следовательно, треугольник ABC равносторонний и его периметр $P=3\cdot 7\sqrt{2}=21\sqrt{2}$. *Ответ:* $21\sqrt{2}$. □

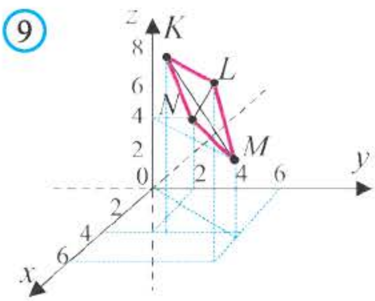
1.3. Координаты середины отрезка

Пусть $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2;)$ – произвольные точки, точка $C(x;y;z)$ середина отрезка AB (рис. 8).

8



9



Через точки A, B и C проведём прямые, параллельные оси Oz, пересекающие плоскость Oxy в точках $A_z(x_1;\ y_1;\ 0)$, $B_z(x_2;\ y_2;\ 0)$ и $C_z(x;\ y;\ 0)$. Тогда по теореме Фалеса точка C_z – середина отрезка A_zB_z.

Отсюда по формулам нахождения координат середины отрезка на плоскости $x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}$.

Чтобы найти координату z, нужно вместо плоскости Oxy рассмотреть плоскость Oxz или Oyz.

Тогда и для z получим формулу, подобную вышеприведённой.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

Аналогично, используя координаты концов A и B отрезка AB, по формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

находят координаты точки $P(x_1; y_1; z_1)$, делящей отрезок AB в отношении λ ($AP : PB = \lambda$).

Задача 3. Докажите, что четырёхугольник $MNKL$ с вершинами $M(3; 6; 4)$, $N(0; 2; 4)$, $K(3; 2; 8)$, $L(6; 6; 8)$ – параллелограмм (рис. 9).

Доказательство: Для решения задачи используем признак параллелограмма: Четырёхугольник, точка пересечения диагоналей которого делит их пополам, является параллелограммом.

Координаты середины отрезка MK:

$$x = \frac{3+3}{2} = 3; \qquad y = \frac{6+2}{2} = 4; \qquad z = \frac{4+8}{2} = 6.$$

Координаты середины отрезка NL:

$$x = \frac{0+6}{2} = 3; \qquad y = \frac{2+6}{2} = 4; \qquad z = \frac{4+8}{2} = 6.$$

Координаты середин отрезков MK и NL равны. Это говорит о том, что отрезки пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.

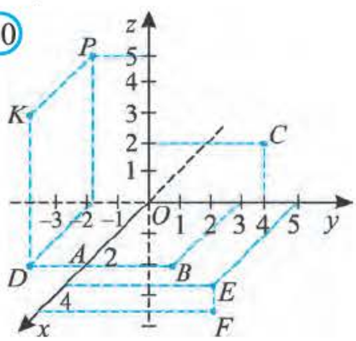
Следовательно, четырёхугольник $MNLK$ – параллелограмм. $\square$

Задачи к теме и практические задания

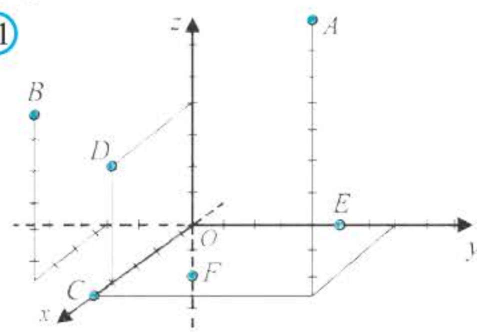
1. Определите координаты точек, изображённых на рисунке 10.

2. Построена декартова система координат и в ней заданы точки, $A(0; 3; 1)$, $B(-2; 0; 0)$, $C(0; 0; 8)$, $D(0; -9; 0)$, $E(5; -1; 2)$, $F(-6; 2; 1)$. Какие из точек расположены: *a*) на координатных осях; *b*) на координатных плоскостях; *c*) внутри октантов?

10



11



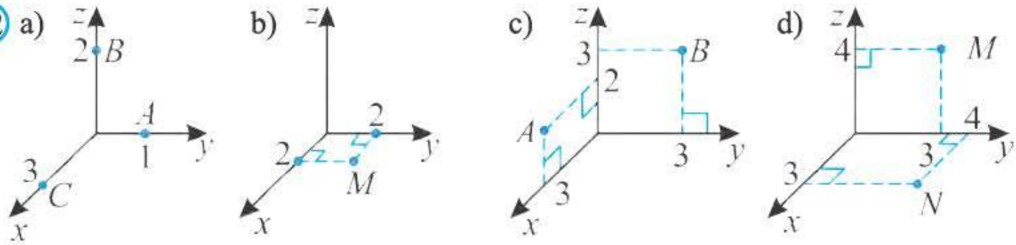
3. Найдите координаты точек на рисунке 11.

4. Найдите координаты точек, изображённых на рисунке 12.

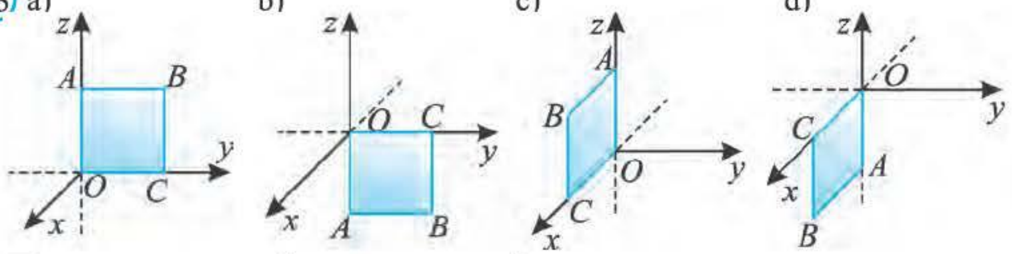
5. На рисунке 13 изображён квадрат, диагональ которого равна $\sqrt{2}$. Найдите координаты его вершин.

6. Найдите координаты проекции точки A (3; 2; 4) на координатные плоскости.

12



13



7. Пусть в декартовой прямоугольной системе координат заданы точки $A(-1; 2; -3)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 5)$, $D(-2; 2; 0)$, $E(5; -1; 0)$, $F(0; 2; 0)$, $G(9; 0; 0)$, $H(9; 0; 2)$, $I(6; 3; 1)$, $J(-6; 3; 5)$, $K(-6; -2; 3)$, $L(6; -2; 4)$, $M(6; 3; -9)$, $N(-6; 3; -8)$, $O(-6; -3; -6)$, $P(6; -3; -2)$. На какой координатной оси, координатной плоскости и в каком октанте расположены эти точки? Заполните следующую таблицу по образцу.

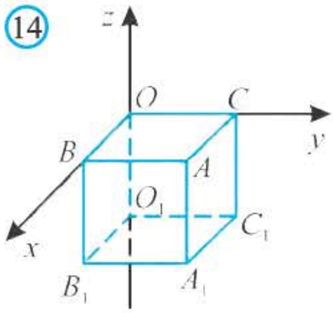
Положение точки	Особенность координат точки	Точка
Ось Ox	$y=0$, $z=0$, координата x отлична от 0	$G(9; 0; 0)$
Ось Oy		
Ось Oz		
Плоск. Oxz	$z=0$, координаты x и y отличны от 0	$D(-2; 2; 0)$
Плоск. Oyz		
Плоск. Oxz		
1 октант	$x>0, y>0, z>0$	$I(6; 3; 1)$
2 октант		
3 октант		
4 октант		
5 октант		
6 октант		
7 октант		
8 октант		

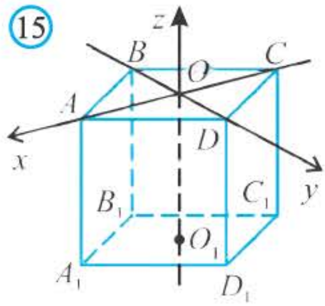
8. Найдите расстояние между точками $A(2; 0; -3)$ и $B(3; 4; 0)$.

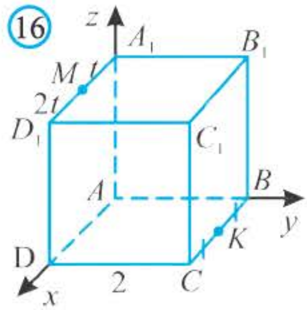
9. Найдите расстояние от точки $A(3; 3; 3)$: a) до координатных плоскостей; b) до координатных осей; c) до начала координат.

10. Найдите расстояние от точки M $(2; -3; 1)$ до координатных плоскостей.

11. Определите положение точки, находящейся от каждой координатной плоскости на расстоянии 3 единичных отрезков.







12. Найдите координаты вершин куба, изображённого на рисунке 14, если $OA = 2\sqrt{2}$.

13. Которая из точек $C(2; 5; -1)$ и $D(2; 1; -6)$ расположена ближе к началу координат?

14. Найдите периметр треугольника, вершины которого расположены в точках $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 1; 2)$.

15. Существует ли треугольник, вершины которого расположены в точках $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 4)$, $C(3; 4; 5)$?

16. Докажите, что точки $A(-2; 0; 5)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(1; 1; -3)$, $D(0; -1; -1)$ являются вершинами параллелограмма.

17. Определите вид треугольника ABC и найдите его периметр и площадь: a) A $(3; 0; 0)$, B $(0; 3; 0)$, C $(0; 0; 3)$; b) A $(2; 0; 5)$, B $(3; 4; 0)$, C $(2; 4; 0)$; c) A $(2; 4; -1)$, B $(-1; 1; 2)$, C $(5; 1; 2)$.

18. Найдите координаты точек, лежащих в плоскости Oxy и равноудаленных от точек $A(0; 1; -1)$, $B(-1; 0; -1)$, $C(0; -1; 0)$.

19. Найдите координаты других вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если A $(1; 1; 1)$, B $(-1; 1; 1)$, C $(-1; -1; 1)$, C_1 $(-1; -1; -1)$.

20. Докажите, что пирамида $SABC$ с вершинами в точках S $(0; 0; 0)$, A $(2; 0; 0)$, B $(0; 2; 0)$, C $(0; 0; 2)$ – правильная.

21. Напишите уравнение сферы и шара с центром в начале координат и радиусом, равным 5.

22. Напишите уравнение шара с центром в точке A (1; 2; 4) и радиусом, равным 3.

23. Напишите уравнение шара, концы диамера которого расположены в точках A (–2; 1; 3), B (0; 2; 1).

24. Постройте модель куба из плотной бумаги. Найдите координаты вершин этого куба, приняв одну из его вершин за начало координат.

25. Найдите координаты середины отрезка AB:

1) $A(-1; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$; 2) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 2; 2)$; 3) $A(-2; 4; 2)$, $B(2; -4; 2)$, 4) $A(1{,}2; -3; 6{,}3)$, $B(-2{,}6; 3{,}2; -5{,}1)$; 5) $A(\sqrt{3}; 2; 1-\sqrt{2})$, $B(3\sqrt{3}; 1; 1+\sqrt{2})$.

26. Найдите координаты середин рёбер и центров граней куба, изображённого на рисунке 15.

27. Даны точки $A(3;-1;4)$, $B(-1;1;-8)$, $C(2;1;-6)$, $D(0;1;2)$. Найдите координаты середин отрезков: a) AB и CD; b) AC и BD.

28. Точки $M(1;-1;2)$ и $N(-3;2;4)$ делят отрезок AB на три равные части. Найдите координаты концов отрезка AB.

29. Стороны четырёхугольника $ABCD$ соответственно параллельны сторонам прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $ABCD$ – прямоугольник.

30. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная его плоскости. Расстояния от точки K до других вершин прямоугольника равны 6 см, 7 см и 9 см. Найдите длину отрезка AK.

31*. В пространстве заданы точки $A(3; 0; -1)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(5; -2; -1)$. Найдите координаты точек, лежащих в плоскости Oyz и равноудалённых от точек A, B, C.

32. Найдите координату точки D параллелограмма $ABCD$, если a) $A(-2; -4; 3)$, $B(3; 1; 7)$, $C(4;2;-5)$; b) $A(4; 2; -1)$, $B(1; -3; -2)$, $C(-6; 2; 1)$; c) $A(-1; 7; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(9; -3; -8)$.

33. Найдите координаты точки $M(x; y; z)$, делящей отрезок CK в отношении $CK:KM = \lambda$. a) $C(-5; 4; 2)$, $K(1; 1;-1)$ и $\lambda = 2$; b) $C(1; -1; 2)$, $K(2; -4; 1)$ и $\lambda = 0{,}5$; c) $C(1; 0; -2)$, $K(9; -3; 6)$ и $\lambda = \frac{1}{3}$.

34. Найдите координаты точки M – точки пересечения медиан треугольника с вершинами в точках $A(3; 2; 4)$, $B(1; 3; 2)$, $C(-3; 4; 3)$.

35. Найдите координаты точки L – основания биссектрисы BL треугольника с вершинами в точках $A(5; 6; 3)$, $B(3; 5; 1)$, $C(0; 1; 1)$.

36*. Найдите длину биссектрисы AL треугольника с вершинами в точках $A(4; 0; 1)$, $B(5; -2; 1)$, $C(4; 8; 5)$.

37*. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 1)$, $C(3; 1; -1)$. Найдите: a) длину высоты, опущенной на большую сторону; b) углы; c) площадь треугольника.

38*. Найдите длину отрезка MK, используя приведённые для куба данные на рисунке 16.

Исторические сведения

В переписке с известным целителем и математиком Абу Али ибн Сино Абу Райхон Беруни задаёт следующий вопрос: «Почему Аристотель и другие (философы) называют шесть сторон?»

Рассматривая шестисторонний куб, Беруни говорит о фигурах «с другим количеством сторон» и добавляет, что «шарообразные фигуры не имеют сторон.» А Ибн Сино отвечает, что «во всех случаях нужно считать, что сторон шесть, так как у каждой фигуры, независимо от её формы, есть три измерения – длина, глубина и ширина».

Здесь Ибн Сино имеет ввиду три координаты, именуемые условно «шесть сторон».

В произведении «Канон Масъуда» Беруни приводит точное математическое определение шести сторон: «Сторон шесть, так как они ограничивают движение фигур по своим измерениям. Измерений три: длина, ширина и глубина. А их в два раза больше самих измерений.»

В предыдущих книгах автор определяет положение небесных тел с помощью двух координат относительно небесной сферы – эклиптического уравнения. Либо через те же координаты, но относительно небесного экватора или горизонта. Однако при определении взаимного расположения звёзд и небесных светил придётся учитывать и случаи затмений. Вот в таких случаях появляется необходимость в третьей сферической координате. Эта необходимость привела Беруни к отказу от теории небесных координат.

2. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

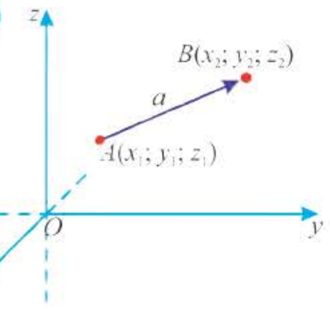
2.1. Векторы в пространстве

Понятие вектора в пространстве вводят также как на плоскости.

Вектором в пространстве называют направленный отрезок.

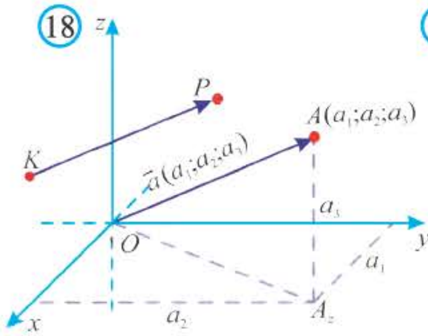
Основные понятия, относящиеся к векторам в пространстве, аналогичны этим понятиям на плоскости: длина (модуль), направление вектора, равенство векторов.

17



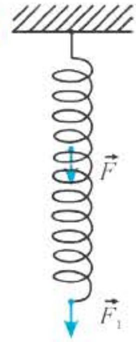
$\overline{a}\left(a_1;a_2;a_3\right)$

18



$\overline{AB}\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right)$

19



Координатами вектора с началом в точке A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и концом в точке B $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ называют числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ (рис. 17).

Приведем без доказательства свойства векторов, аналогичных свойствам на плоскости.

Также как на плоскости, соответствующие координаты равных векторов равны и, обратно, векторы с равными координатами равны.

На основании этого вектор можно обозначить как $\overline{AB}\left(a_1;a_2;a_3\right)$ или $\overline{a}\left(a_1;a_2;a_3\right)$ или кратко $\overline{(a_1;\ a_2;\ a_3)}$ (рис. 18).

Вектор можно записать и без координат $\overline{AB}$ (или $\overline{a}$). В этой записи на первом месте начало вектора, а на втором – конец.

Вектор с координатами, равными нулю, называют *нулевым вектором* и обозначают $\overline{0}(0;0;0)$ или $\overline{0}$, направление этого вектора не определено.

Если начало вектора расположено в начале координат O, а числа a_1, a_2 и a_3 – координаты точки A, то есть $A(a_1;\ a_2;\ a_3)$, то эти же числа будут координатами вектора $\overline{OA}$: $\overline{OA}(a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Однако вектор в пространстве $\overline{KP}$ с началом в точке $K(c_1;\ c_2;\ c_3)$ и концом в точке P $(c_1+a_1;\ c_2+a_2;\ c_3+a_3)$ будет иметь те же координаты:

$\overline{KP}(c_1+a_1-c_1;\ c_2+a_2-c_2;\ c_3+a_3-c_3) = \overline{KP}\ (a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Отсюда следует, что вектор можно приложить к любой точке пространства. В геометрии мы рассматриваем такие *свободные* векторы. Но в физике, обычно вектор *связан с некоторой точкой*. Например, воздействие силы приложенная к пружине F на рисунке 19 зависит от точки её приложения.

Длиной вектора называют длину направленного отрезка, изображающего его (рис. 17). Длину вектора $\overline{a}$ записывают так $|\overline{a}|$.

Длина вектора $\overline{a}\,(a_1;\, a_2;\, a_3)$, заданного координатами, вычисляется по формуле $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}$.

Задача 1. Даны точки $A\,(2;\, 7;\, -3)$, $B\,(1;\, 0;\, 3)$, $C\,(-3;\, -4;\, 5)$ и $D\,(-2;\, 3;\, -1)$. Какие из векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AD}$ и $\overline{BD}$ равны между собой?

Решение: У равных векторов равны соответствующие координаты. Поэтому найдём координаты векторов:

$\overline{AB} = (1-2,\ 0-7,\ 3-(-3)) = (-1,\ -7,\ 6);$

$\overline{DC} = (-3-(-2),\ -4-3,\ 5-(-1)) = (-1,\ -7,\ 6).$

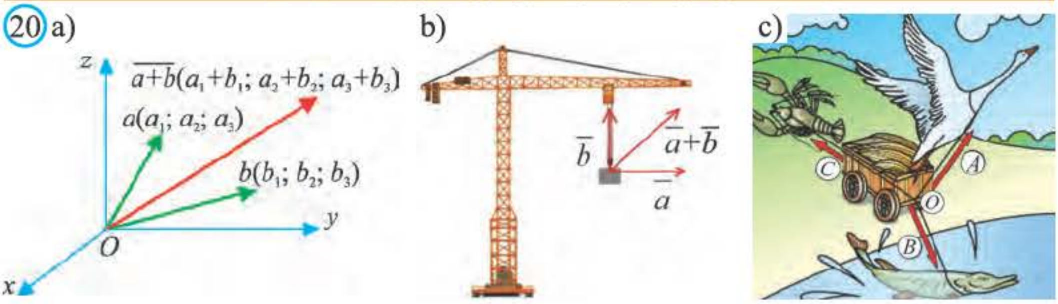
Следовательно, $\overline{AB} = \overline{DC}$. Докажите самостоятельно, что $\overline{BC} = \overline{AD}$. □

2.2. Действия над векторами в пространстве

Действия над векторами. Сложение векторов, умножение на число и их скалярное произведение определяется также как на плоскости.

Суммой векторов $\overline{a}\,(a_1;\, a_2;\, a_3)$ и $\overline{b}\,(b_1;\, b_2;\, b_3)$ называют вектор

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1;\, a_2 + b_2;\, a_3 + b_3) \text{ (рис. 20)}.$$



Пусть кран на рисунке 20.*b* движется вдоль вектора $\overline{a}$, а груз относительно крана вдоль вектора $\overline{b}$. В результате груз движется вдоль вектора $\overline{a} + \overline{b}$. Поэтому из рисунка 20.*c*, на котором изображён сюжет басни русского писателя И.А.Крылова, ясно, что герои басни не смогут сдвинуть телегу с места.

Свойства суммы векторов.

Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ имеют место следующие свойства:

a) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ – переместительный закон сложения векторов;

b) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$ – распределительный закон сложения.

Правило треугольника сложения векторов.

Для любых точек A, B и C (рис. 21): $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

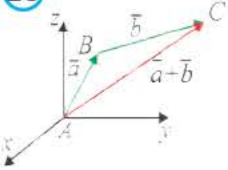
Правило параллелограмма сложения векторов.

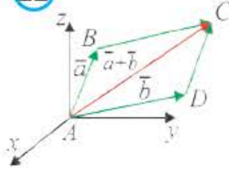
Если $ABCD$ – параллелограмм (рис. 22), то $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

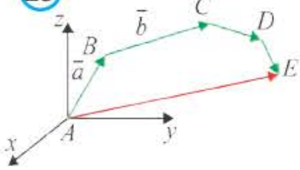
Правило многоугольника сложения векторов.

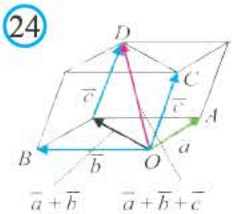
Если точки A, B, C, D и E – вершины многоугольника (рис. 23), то

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE}.$$

21


22


23


24


Правило параллелепипеда сложения трёх векторов, не лежащих в одной плоскости. Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед (рис. 24), то

$$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA_1}=\overline{AC}.$$

Вектор $\lambda\overline{a}=(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$ называют *умножением вектора* $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ *на число* λ (рис. 25). Свойства операции умножения вектора на число.

Для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и чисел λ и μ

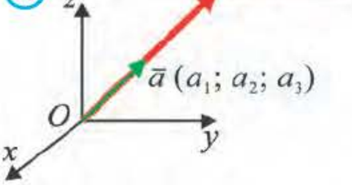
a) $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$;

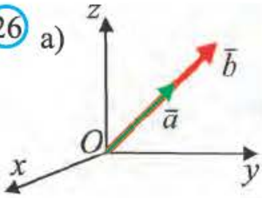
b) $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$;

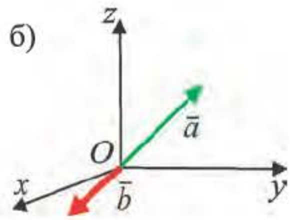
c) $|\lambda\overline{a}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$ и направление вектора $\lambda\overline{a}$

совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda>0$,

противоположно направлению вектора $\overline{a}$, если $\lambda<0$.

25


26 a)


б)


2.3. Коллинеарные и компланарные векторы

Пусть заданы ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены или противоположно направлены, то их называют *коллинеарными векторами* (рис. 26).

Свойство 1. Если для векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеет место равенство $\overline{a} = \lambda\overline{b}$ $(\lambda \neq 0)$, то они коллинеарны и наоборот.

Если $\lambda > 0$, то векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$), если $\lambda < 0$, то противоположно направлены ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$).

Свойство 2. Если векторы $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\overline{b}(b_1; b_2; b_3)$ коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ и наоборот.

Задача 2. Найдите вектор с началом в точке A (1; 1; 1) и концом в точке B, лежащей в плоскости Oxy, коллинеарный вектору $\overline{a}(1; 2; 3)$

Решение: Пусть точка B имеет координаты $B(x; y; z)$. Так как точка B лежит в плоскости Oxy, то $z=0$. Тогда $\overline{AB}(x-1; y-1; -1)$.

По условию задачи векторы $\overline{AB}(x-1; y-1; -1)$ и $\overline{a}(1, 2, 3)$ коллинеарны. Следовательно, их координаты пропорциональны.

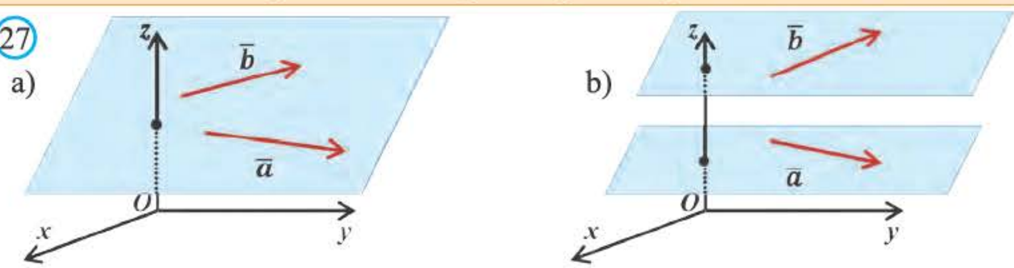
Тогда получаем следующие пропорции $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-1}{3}$.

Откуда находим $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

Итак, $\overline{AB}\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -1\right)$. $\square$

Векторы, лежащие в одной плоскости или параллельных плоскостях, называют *компланарными векторами* (рис. 27).

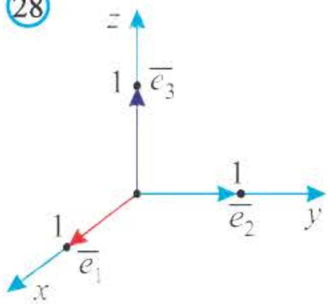
27



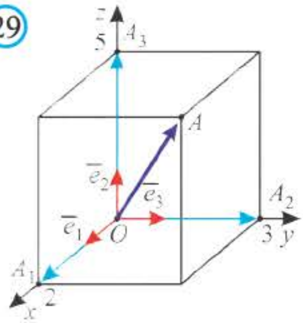
Векторы $\overline{e_1}$ (1; 0; 0), $\overline{e_2}$(0; 1; 0) и $\overline{e_3}$ (0; 0; 1) называют *ортами* (рис. 28).

Любой вектор $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ можно единственным образом *разложить по ортам*, то есть представить в виде $\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3}$ (рис. 29).

28



29



Точно также, если заданы три некомпланарных вектора $\overline{OA}, \overline{OB}$ и $\overline{OC}$, то любой вектор $\overline{OD}$ можно единственным образом представить в виде:

$$\overline{OD} = a_1 \cdot \overline{OA} + a_2 \cdot \overline{OB} + a_3 \cdot \overline{OC}.$$

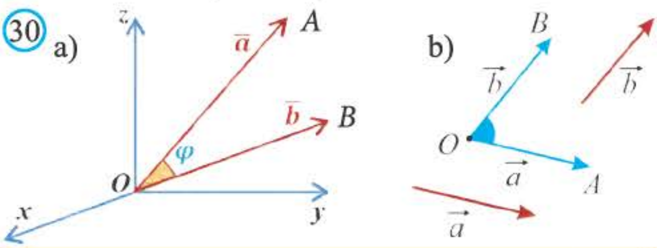
Здесь a_1, a_2, a_3 некоторые действительные числа. Тогда говорят, что *вектор разложен по заданным векторам*.

2.4. Скалярное произведение векторов

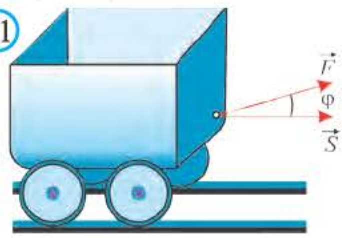
Углом между ненулевыми *векторами* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют угол между направленными отрезками векторов $\overline{OA} = \overline{a}$ и $\overline{OB} = \overline{b}$, исходящих из точки O (рис. 30).

Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначают так $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$.

30



31



Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

Если один из векторов нулевой, то скалярное произведение этих векторов равно нулю.

Скалярное произведение обозначают $\overline{a} \cdot \overline{b}$ или $(\overline{a}, \overline{b})$. По определению

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi. \qquad (1)$$

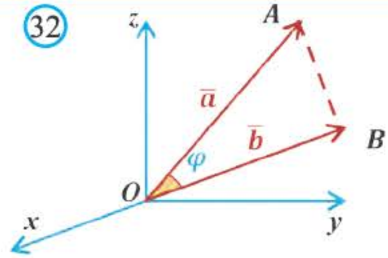
Из определения следует, что если скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно нулю, то эти векторы *перпендикулярны* и наоборот.

В физике работа A, выполненная при движении тела на расстоянии $\overline{s}$, под воздействием силы $\overline{F}$ (рис. 31), равна скалярному произведению силы $\overline{F}$ на расстояние $\overline{s}$: $A = (\overline{F}, \overline{s}) = |\overline{F}| \cdot |\overline{s}| \cos\varphi$.

Свойство. Если $\bar{a}\,(a_1;\, a_2;\, a_3)$ и $b\,(b_1;\, b_2;\, b_3)$, то $(\bar{a}, \bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Доказательство. Приложим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ к началу координат O (рис. 32). Тогда $\overline{OA} = (a_1;\, a_2;\, a_3)$ и $\overline{OB} = (b_1;\, b_2;\, b_3)$. Если векторы неколлинеарны, то получаем треугольник ABO, для которого справедлива теорема косинусов:

32



$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\varphi.$$ Тогда

$$OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2).$$ Однако, $OA^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$,

$$OB^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \quad \text{и} \quad AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2.$$

Следовательно, $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2) =$

$$= \frac{1}{2}({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2 -$$

$$- (b_3 - a_3)^2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Самостоятельно докажите, что и в случае, когда данные векторы коллинеарны ($\varphi = 0°$, $\varphi = 180°$), также выполняется это равенство. □

Свойства скалярного произведения векторов

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ – переместительное свойство.

2. $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ – распределительное свойство.

3. $\lambda \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \cdot \bar{b})$ – сочетательное свойство.

4. Если векторы a и b являются сонаправленными коллинеарными векторами, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|$, так как $\cos 0° = 1$.

5. Если же векторы противоположно направлены, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = -|\bar{a}|\,|\bar{b}|$, так как $\cos 180° = -1$.

6. $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}||\bar{a}| \cos 0° = |\bar{a}|^2 \Rightarrow \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

7. Если вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Следствия:

a) Длина вектора $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$: $|\bar{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$; (1)

b) косинус угла между векторами $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}; \qquad (2)$$

c) условие перпендикулярности векторов $\overline{a}=(a_1;a_2;a_3)$ и $\overline{b}=(b_1;b_2;b_3)$

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \qquad (3)$$

Задача 3. $A(0;\ 1;\ –1)$, $B(1;\ –1;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 0)$, $D(2;\ –3;\ 1)$ – заданные точки. Найдите косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Решение. Найдём длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$:

$$\overline{AB} = (1-0;\ -1-1;\ 2-(-1)) = (1, -2, 3),$$
$$\overline{CD} = (2-3;\ -3-1;\ 1-0) = (-1, -4, 1).$$
$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{14},$$
$$\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2} = \sqrt{18}.$$

Следовательно, $\cos\varphi = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{CD}\right|} = \dfrac{1\cdot(-1)+(-2)(-4)+3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}} = \dfrac{5}{\sqrt{63}}$. □

Задача 4. Найдите угол между векторами $\overline{a}(1;2;0)$, $\overline{b}(1;-\frac{1}{2};0)$.

Решение: $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \dfrac{1\cdot 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot 0}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}}} = 0$.

Итак, $\varphi = 90°$. □

Задача 5. Найдите $|\overline{a}+\overline{b}|$, если $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$ и угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $\dfrac{2\pi}{3}$.

Решение: $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| = \sqrt{\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2} = \sqrt{\overline{a}^2+2\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)+\overline{b}^2} = \sqrt{\left|\overline{a}\right|^2+2\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\phi+\left|\overline{b}\right|^2} =$

$$= \sqrt{9+25+2\cdot 15\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{34-15} = \sqrt{19}$$

Задача 6. Найдите координаты и длины векторов 1) $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{d}=2\overline{a}-\overline{b}$, если $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k}$ и $\overline{b}=-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$.

Решение: Подставим в выражения искомых векторов разложения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по координатам: 1) $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}=2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k}-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}=$ $=\overline{i}+2\overline{j}-2\overline{k}$. Следовательно, $\overline{c}=\overline{(1;2;-2)}$. Тогда $|\overline{c}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$.

2) $\overline{d}=2\overline{a}-\overline{b}=2(2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k})-(-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k})=4\overline{i}+6\overline{j}-8\overline{k}+\overline{i}+\overline{j}2\overline{k}=$ $=5\overline{i}+7\overline{j}-10\overline{k}$.

Следовательно, $\overline{d}=\overline{(5;7;-10)}$. Тогда $|\overline{d}|=\sqrt{5^2+7^2(-10)^2}=\sqrt{174}$. □

Задача 7. Найдите произведение $(2\overline{a} + 3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})$, если угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен 30° и $|\overline{a}| = \sqrt{3}$, $|\overline{b}|=2$.

Решение: Сначала найдём поизведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos 30° = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Затем перемножим заданные выражения как многочлены и, пользуясь распределительным свойством умножения вектора на число, получим:

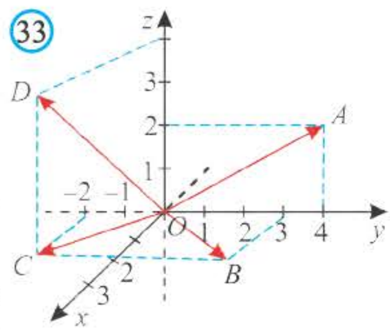
$$(2\overline{a}+3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})=-4\overline{a}^2 +2(\overline{a}, \overline{b})-6(\overline{a}, \overline{b})+3\overline{b}^2=-4\overline{b}^2-4(\overline{a}, \overline{b})+3\overline{b}^2.$$

Учитывая, что $\overline{a}^2=|\overline{a}|^2=9$, $\overline{b}=|\overline{b}|^2=4$, $(\overline{a}, \overline{b})=3$ найдём искомое произведение $(2\overline{a}+3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})=-4\cdot 9-4\cdot 3+3\cdot 4=-36.$ □

Задачи к теме и практические задания

39. Определите координаты векторов на рисунке 33.

40. $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; 1; 1)$ и $O(0; 0; 0)$ – заданные точки. Определите координаты векторов $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{BO}, \overline{CO}$ и $\overline{AB}$.



41. Определите координаты вектора $\overline{BA}$, если $\overline{AB}$ $(a; b; c)$.

42. Определите координаты вектора $\overline{AB}$, если: a) $A(1; 2; 3)$, $B(3; 7; 6)$; b) $A(-3; 2; 1)$, $B(1; -4; 3)$.

43. Найдите длины векторов $\overline{a}(1; -1; 1)$, $\overline{b}(0; 2; -4)$, $\overline{c}(2; 3; -1)$, $\overline{d}(1; 2; 5)$.

44. Найдите x, если длины векторов $\overline{a}(2; 1; 3)$ и $\overline{b}(-1; x; 2)$ равны.

45. Найдите координаты вектора $\overline{a}(c; 2c; -c)$, длина которого равна $\sqrt{54}$.

46. Пусть A, B, C, D, E и F вершины правильного шестиугольника. Приведите примеры: a) двух равных; b) двух сонаправленных; c) двух равных и противоположно направленных; d) двух неравных и противоположно направленных векторов.

47. При каких значениях k длина вектора: a) $\overline{a}(4; k; 2)$; b) $\overline{a}(k-1;1;4)$; c) $\overline{a}(k; 1; k+2)$; d) $\overline{a}(k-1; k-2; k+1)$ будет равна $\sqrt{21}$?

48. Даны три точки: $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$. Найдите такую точку $D(x;\ y;\ z)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны.

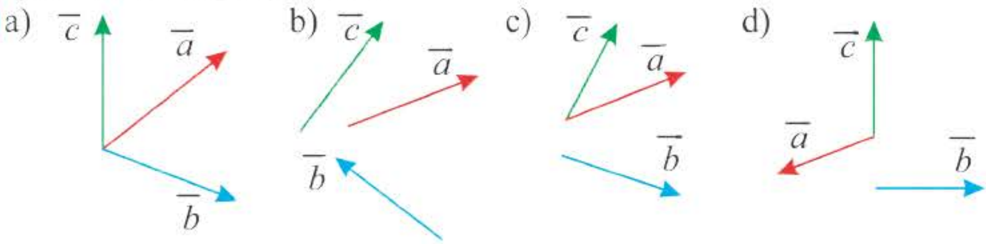
49. Даны три точки: $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 2;\ -1)$. Найдите точку $D(x;\ y;\ z)$, если: a) векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны; b) сумма векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равна нулевому вектору.

50*. Даны векторы $(2;\ n;\ 3)$ и $(3;\ 2;\ m)$. При каких значениях m и n эти векторы будут коллинеарны?

51. Найдите вектор с началом в точке $A(1;\ 1;\ 1)$ и концом в точке B, лежащей в плоскости Oxy, который коллинеарен вектору $a(1;-2;\ 3)$.

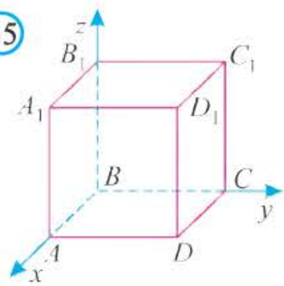
52*. Найдите координаты точки D, если: a) $A(-2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ 1;\ 7)$, $C(4;\ 2;\ -5)$; b) $A(4;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ -3;\ -2)$, $C(-6;\ 2;\ 1)$; c) $A(-1;\ 7;\ 4)$, $B(1;\ 5;\ 2)$, $C(9;\ -3;\ -8)$; d) $A(-2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ 1;\ 7)$, $C(4;\ 2;\ -5)$ – вершины параллелограмма $ABCD$.

53. Найдите по правилу параллелограмма сумму векторов, изображенных на рисунке 34.

34


54. Какой из четырёхугольников $ABCD$ и $MNPK$ является ромбом, а какой квадратом, если: $A(6;7;8)$, $B(8;2;6)$, $C(4;3;2)$, $D(2;8;4)$ и $M(3;5;2)$, $N(7;1;2)$, $P(3;-3;2)$, $K(-1;1;2)$?

55. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 35). Определите векторы: a) равные векторам $\overline{AB}$, $\overline{DD_1}$, $\overline{AC}$; b) противоположно направленные векторам $\overline{A_1D_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{BD}$; c) коллинеарные векторам $\overline{BA}$, $\overline{AA_1}$; d) компланарные парам векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{A_1C}$.

35


56. Найдите координаты и длину вектора $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, если: 1) $\overline{a}(1;-\ 4;0)$, $\overline{b}(-\ 4;0;8)$; 2) $\overline{a}(0;2;5)$, $\overline{b}(4;\ 3;\ 0)$.

57. Найдите координаты и длину вектора $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$, если: 1) $\overline{a}(1;\ -4;\ 0)$, $\overline{b}(-4;\ 8;\ 0)$; 2) $\overline{a}(0;\ -2;\ 7)$, $\overline{b}(0;\ 4;\ -1)$.

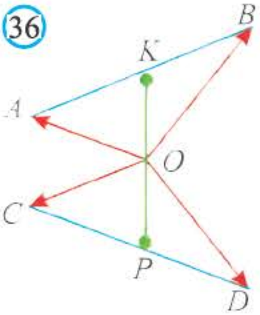
58. Найдите координаты и длину вектора: a) $2\overline{b}$; b) $-3\,\overline{b}$; c) $-1{,}5\,\overline{c}$; d) $0 \cdot \overline{b}$, если $\overline{b}(-4; 8; 2)$.

59. Разложите векторы: $\overline{a}(1; -1; 1)$, $\overline{b}(0; 2; -4)$, $\overline{c}(2; 3; -1)$, $\overline{d}(1; 2; 5)$ по ортам.

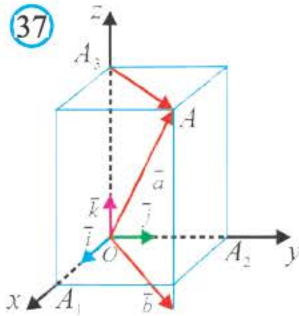
60*. Даны векторы: $\overline{a}(1; -1; 1)$, $\overline{b}\,(0; 2; -4)$, $\overline{c}(2; 3; -1)$, $\overline{d}(1; 2; 5)$. Найдите $|\overline{a} + 2\overline{b}|$, $|\overline{a} - 3\overline{b}|$, $|\overline{c} - 2\overline{d}|$, $|3\overline{a} + 4\overline{d}|$.

61*. Точки K и P середины отрезков AB и CD, лежащих на скрещивающихся прямых и точка O середина отрезка KP (рис. 36). Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{0}$.

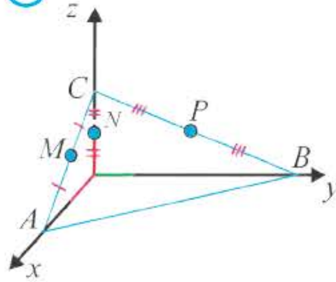
36



37



38



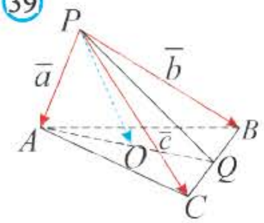
62. На рисунке 37 $OA_1 = 2$, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 3$. Найдите координаты векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{A_3A}$.

63. На рисунке 38 $OA = 4$, $OB = 9$, $OC = 2$, точки M, N и P середины отрезков AC, OC и CB соответственно. Найдите координаты векторов $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{PC}$, $\overline{MC}$ и $\overline{CN}$.

64. Точка Q середина рёбра BC тетраэдра $PABC$, а точка O середина отрезка AQ (рис. 39). Разложите вектор $\overline{PO}$ по векторам $\overline{PA} = \overline{a}$, $\overline{PB} = \overline{b}$ и $\overline{PC} = \overline{c}$.

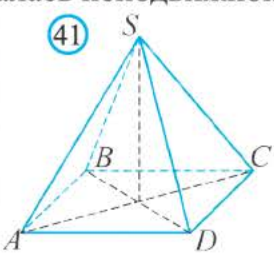
65*. На лодку, изображённую на рисунке 40, действует сила $\overline{F_1} = 120\ N$ течения реки и сила $\overline{F_2} = 100\ N$ дующего с берега ветра. С какой силой нужно удержать лодкуб чтобы она оставалась неподвижной?

39



40

41



66. Найдите угол между единичными векторами, скалярное произведение которых равно: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) 0; d) $-\frac{1}{2}$; e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

67. Найдите скалярное произведение векторов: a) $\overline{a}$ (1; –1; 1), $\overline{b}$ (0; 2; –4); b) $\overline{c}$(2; 3; –1), $\overline{d}$ (1; 2; 5); c) $\overline{e}$(1; –1; 1), $\overline{f}$(0; 2; – 4); d) $\overline{g}$ (2; 3; –1), $\overline{h}$(1; 2; 5).

68. В треугольнике ABC $\angle A=50°$, $\angle C=90°$. Найдите угол между векторами: a) $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$; b) $\overline{CA}$ и $\overline{AB}$; c) $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

69. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если их длины и угол между ними соответственно равны: a) 5, 12, 50°; b) 3, $\sqrt{2}$, 45°; c) 5, 6, 120°; d) 4, 7, 180°.

70. При каких значениях n следующие векторы будут перпендикулярны?
a) $\overline{a}(2; -1; 3)$, $\overline{b}(1; 3; n)$; b) $\overline{a}(n; -2; 1)$, $\overline{b}(n; -n; 1)$;
c) $\overline{a}(n; -2; 1)$, $\overline{b}(n; 2n; 4)$; d) $\overline{a}(4; 2n; -1)$, $\overline{b}(-1; 1; n)$.

71. Даны векторы $\overline{a}(1;-5;2)$, $\overline{b}(3;1;2)$. Найдите скалярное произведение векторов a) $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$; b) $\overline{a}+2\overline{b}$ и $3\overline{a}-\overline{b}$; c) $2\overline{a}+\overline{b}$ и $3\overline{a}$b $-2\overline{b}$.

72. Даны точки A (1; 0; 1), B (–1; 1; 2), C (0; 2; –1). Найдите на оси Oz координаты такой точки D, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были перпендикулярны.

73*. Докажите, что $(\overline{a}, \overline{b}) \le |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$. Для каких векторов выполняется равенство?

74*. Все рёбра пирамиды $SABCD$, основанием которой является квадрат, равны между собой (рис. 41). Найдите угол между векторами: a) $\overline{SA}$ и $\overline{SB}$; b) $\overline{SD}$ и $\overline{AD}$; c) $\overline{SB}$ и $\overline{SD}$ d) $\overline{AS}$ и $\overline{AC}$; e) $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

75*. Единичные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ попарно образуют между собой угол 60°. Найдите угол между векторами:
a) $\overline{a}$ и $\overline{b}+\overline{a}$; b) $\overline{a}$ и $\overline{b}-\overline{c}$.

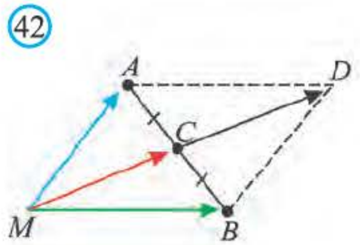
76. O – точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Через вершину B квадрата проведена прямая, параллельная его диагонали и пересекающая прямую DA в точке F. Разложите вектор $\overline{BF}$ по векторам $\overline{DO}$ и $\overline{DC}$.

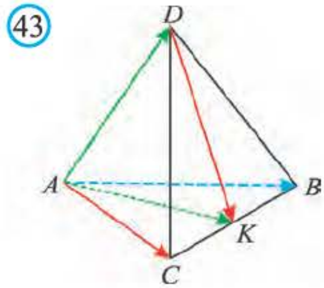
77. Выразите вектор $\overline{OC}$ через векторы $\overline{AB}$ va $\overline{AC}$, если O – точка пересечения медиан треугольника ABC.

78*. Пусть точка C – середина отрезка AB. Докажите, что тогда для любой точки M верно равенство $\overline{MC}=\frac{1}{2}(\overline{MA}+\overline{MB})$ (рис. 42).

79. Разложите вектор $\overline{DK}$ по векторам $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$, если точка K – середина рёбра BC тетраэдра $ABCD$ (рис. 43).

80*. Под воздействием силы $\overline{F}=20N$, приложенной к телу под углом 30°, тело сдвинулось на 3 метра. Найдите, чему равна работа.





81*. Под воздействием силы $\overline{F}=50\ N$, приложенной к телу под углом 60°, оно сдвинулось на 8 метров. Найдите чему равна работа.

82*. (Неравенство Коши-Буняковского). Докажите при помощи векторов, что для любых чисел $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3$ имеет место неравенство $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)\,(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ПОДОБИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Геометрические преобразования в пространстве

Если каждую точку заданной в пространстве фигуры F изменить одним и тем же способом, то получим фигуру F_1. Если при этом преобразовании различные точки первой фигуры переходят в различные точки второй, то говорят о *преобразовании геометрической фигуры*.

Если расссматривать все пространства как геометрическую фигуру, то также можно говорить о преобразовании геометрической фигуры.

Понятие геометрического преобразование в пространстве вводят также как на плоскости. Следовательно, свойства некоторых рассматриваемых ниже видов преобразований и их доказательства также подобны соответствующим им на плоскости. Поэтому, мы не будем доказывать их и рекомендуем провести их самостоятельно.

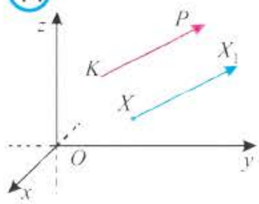
3.2. Движение и параллельный перенос

Преобразование фигур, при котором сохраняются расстояния между точками, называют *движением.* Можно привести следующие свойства движения. При движении прямая переходит в прямую, луч – в луч, отрезок – в равный ему отрезок, угол – в равный ему угол, треугольник – в равный ему треугольник, плоскость – в плоскость, тетраэдр – в равный ему тетраэдр.

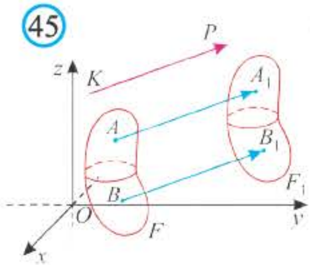
В пространстве фигуры, которые можно перевести одну в другую при некотором движении называют *равными фигурами*.

Простейшим примером движения является параллельный перенос.

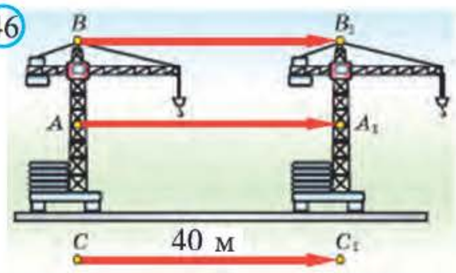
44



45



46



Пусть в пространстве даны вектор $\overline{KP}$ и произвольная точка X (рис. 44). Говорят, что точка X перешла в точку X_1 параллельным переносом на вектор $\overline{KP}$, если выполняется условие $\overline{XX_1} = \overline{KP}$.

Если каждую точку фигуры F сдвинуть на вектор $\overline{KP}$ при помощи параллельного переноса (рис. 45), то получим фигуру F_1. Тогда говорят, что *фигура F получена параллельным переносом фигуры F_1*. При параллельном переносе каждая точка фигуры F сдвигается в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

Каждая точка подъёмного крана, изображённого на рисунке 46, параллельно перенесена на 40 м относительно начального положения.

Ясно, что параллельный перенос является движением. Поэтому прямая переходит в прямую, луч – в луч, плоскость – в плоскость, и т. д.

Пусть точка $X(x; y; z)$ фигуры F перешла в точку $X_1(x_1; y_1; z_1)$ фигуры F_1 при помощи параллельного переноса на вектор $\overline{KP} = (a; b; c)$.

Тогда по определению получим:

$x_1 - x = a$, $y_1 - y = b$, $z_1 - z = c$ или $x_1 = x + a$, $y_1 = y + b$, $z_1 = z + c$.

Эти равенства называют формулами *параллельного переноса*.

Задача 1. В какую точку перейдёт точка $P(-2; 4; 6)$ при параллельном переносе на вектор $\overline{p} = (3; 2; 5)$?

Решение. По вышеприведённым формулам параллельного переноса: $x_1 = -2 + 3 = 1$, $y_1 = 4 + 2 = 6$, $z_1 = 6 + 5 = 11$. *Ответ:* $P_1(1; 6; 11)$. □

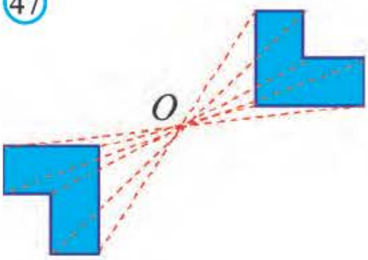
3.3. Центральная симметрия в пространстве

Если в пространстве $\overline{AO} = \overline{OA_1}$, то есть точка O – середина отрезка AA_1, то точки A и A_1 называют симметричными относительно точки O.

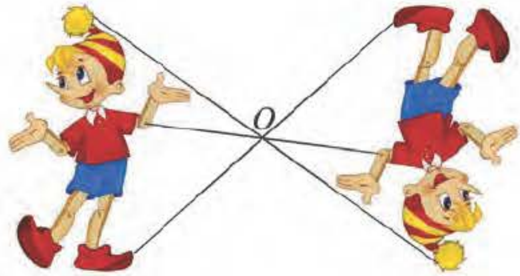
Если в пространстве каждая точка фигуры F переходит в точку, симметричную относительно точки O (рис. 47), то такое преобразование называют *симметрией относительно точки O.* На рисунках 48, 49 изображёны фигуры симметричные относительно точки O. Симметрия относительно точки является движением.

Если при симметрии относительно точки O фигура F переходит в себя, то её называют *центрально симметричной фигурой.*

47

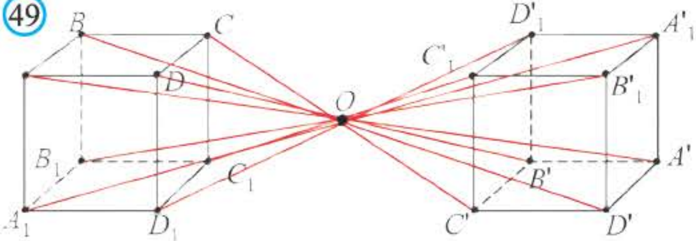


48

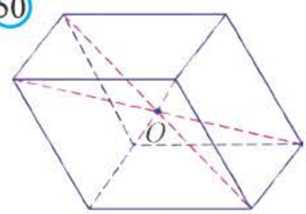


Например, диагонали параллелепипеда (рис. 50) относительно их точки пересечения O являются центрально симметричными фигурами.

49



50



Задача 2. В какую точку перейдёт точка $A = (1; 2; 3)$ при симметрии относительно точки $O\,(2; 4; 6)$?

Решение. Пусть $A_1 = (x; y; z)$ – искомая точка. По определению точка O – середина отрезка AA_1. Следовательно, $2 = \frac{x+1}{2}$, $4 = \frac{y+2}{2}$, $6 = \frac{z+3}{2}$. Из этих уравнений получаем: $x = 4 - 1 = 3$, $y = 8 - 2 = 6$, $z = 12 - 3 = 9$.

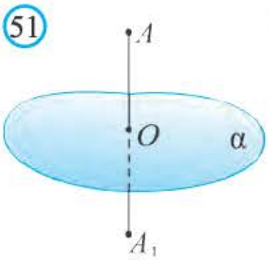
Ответ: $A_1(3; 6; 9)$. □

3.4. Симметрия относительно плоскости

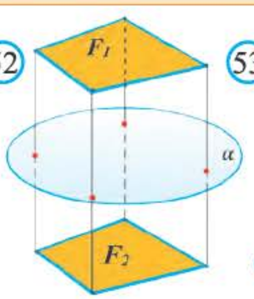
Точки A и A_1 называют *симметричными относительно плоскости* α, если плоскость перпендикулярна отрезку AA_1 и делит его пополам (рис. 51). Фигуры F_1 и F_2 на рисунке 52 симметричны относительно плоскости α. Очевидно, что наш силуэт и его отражение симметричны относительно плоскости зеркала (рис. 53).

Симметрия относительно плоскости α является движением.

51

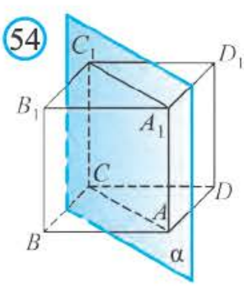


52



53

54



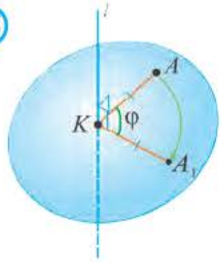
Поэтому при симметрии относительно плоскости α отрезок переходит в равный ему отрезок, прямая – в прямую, плоскость – в плоскость.

Если при симметриии относительно плоскости фигура F переходит в себя, то её называют *фигурой симметричной относительно плоскости.*

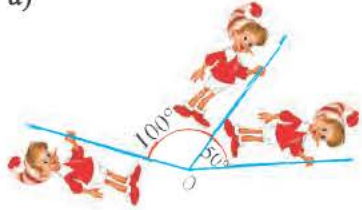
Например, изображённый на рисунке 54 куб, есть фигура, симметричная относительно плоскости α, проходящей через его диагонали AA_1и CC_1.

3.5. Поворот и симметрия относительно оси

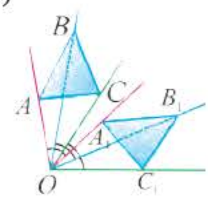
55



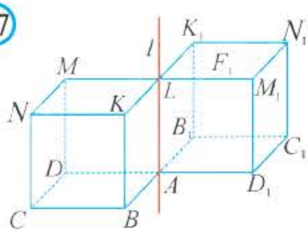
56 a)



b)



57



Пусть в пространстве заданы точки A и A_1 и прямая l. Если перпендикуляры AK и A_1K, опущенные на прямую l, равны и образуют угол φ, то говорят, что точка A перешла в точку A_1 *в результате поворота на угол φ относительно прямой l* (рис. 55).

Если каждую точку фигуры F повернуть на угол φ относительно прямой l, то получим новую фигуру F_1 . Тогда говорят, что фигура F перешла в фигуру F_1 с помощью поворота на угол φ относительно прямой l. На рисунке 56 мы видим фигуры, полученные таким поворотом. Например, повернув куб, изображённый на рисунке 57, на 180° относительно прямой l, получим новый куб.

Поворот относительно прямой также является движением.

Поворот на 180° относительно прямой l называют *симметрией относительно прямой l.*

Центр, ось и плоскость симметрии называют *элементами симметрии.*

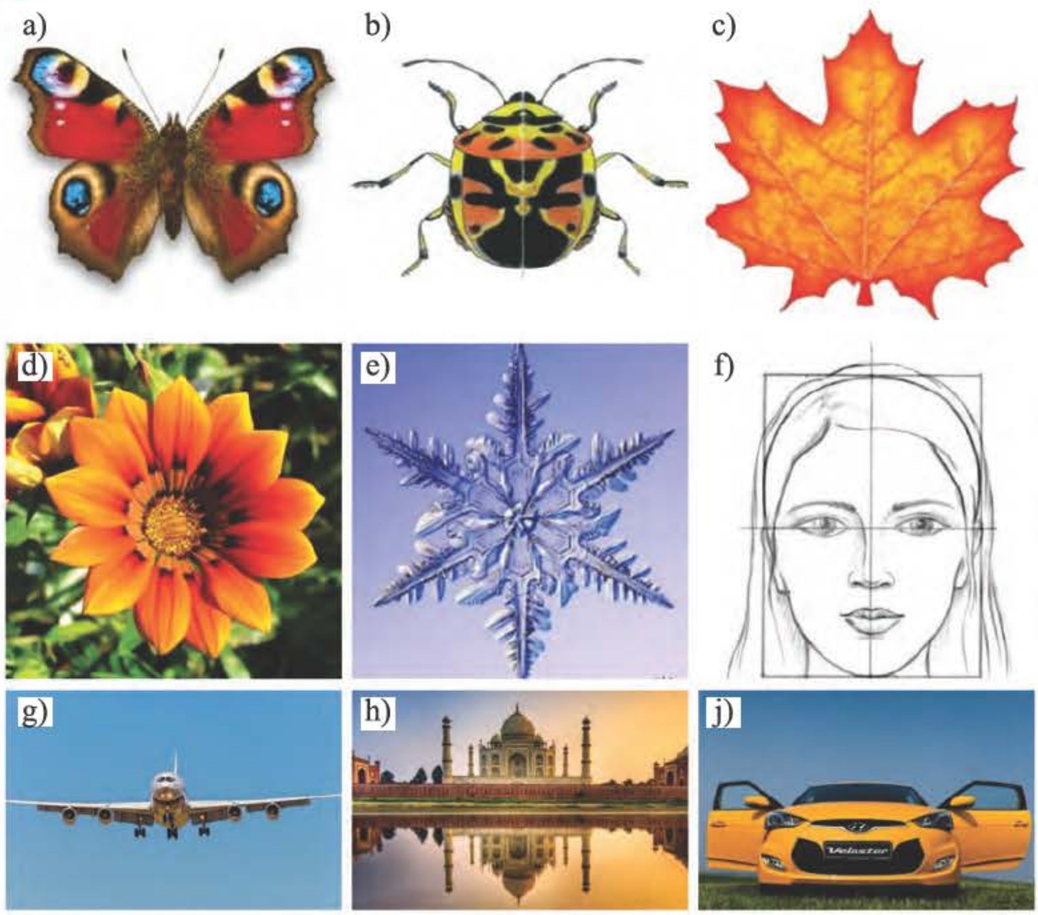
Точки, симметричные точке $A(x;\ y;\ z)$ относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат, будут иметь следующие координаты:

Элементы симметрии	Координаты симметричной точки
Плоскость Oxy	$(x;\ y;\ -z)$
Плоскость Oxz	$(x;\ -y;\ z)$

Плоскость Oyz	$(-x; y; z)$
Ось Ox	$(x; -y; -z)$
Ось Oy	$(-x; y; -z)$
Ось Oz	$(-x; -y; z)$
Точка O	$(-x; -y; -z)$

3.6. Симметрия в природе и технике

58

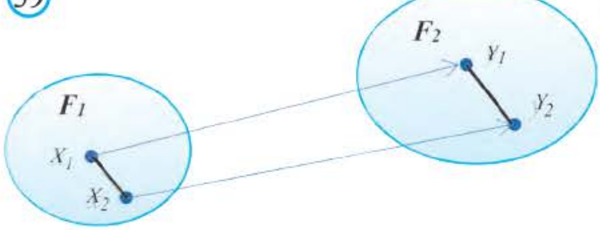


В природе на каждом шагу можно встретить симметрию. Например, множество живых существ, в частности тела человека и животных, листья растений и цветы устроены симметрично (рис. 58). Также в неживой природе есть элементы, например, снежинки, кристаллы соли. Молекулярное строение веществ тоже состоит из симметричных фигур. Это, конечно, неспроста, поскольку симметричные фигуры не только красивы, но и самые устойчивые. Раз так, то можно считать, что красота и совершенство природы построены на основе симметрии. Взяв за основу природную красоту и совершенство, строители, инженеры и архитекторы создают строения и механизмы, здания и сооружения, технику и транспортные средства симметричными. В этой работе им очень помогает наука геометрия.

3.7. Подобие пространственных фигур

Пусть $k \neq 0$ и преобразование переводят фигуру F_1 в фигуру F_2. Если при этом преобразовании для произвольных точек X_1 и X_2 фигуры F_1 и соответствующих им точек Y_1 и Y_2 фигуры F_2: $X_1Y_1 = k \cdot X_2Y_2$, то это преобразование называют *преобразованием подобия* (рис. 59).

59



60

Как видим, понятие преобразования подобия в пространстве вводится также как на плоскости. Следовательно, рассматриваемые ниже виды подобия, их свойства и доказательства этих свойств подобны соответствующим на плоскости. Поэтому, мы не будем останавливаться на их доказательствах и рекомендуем провести их самостоятельно.

Преобразование подобия в пространстве отображает прямую в прямую, луч в луч, отрезок в отрезок и угол в угол. Точно также это преобразование плоскость отображает в плоскость.

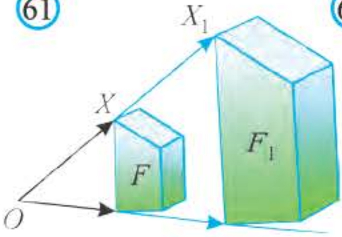
Если в пространстве одна из фигур перешла в другую с помощью преобразования подобия, то эти фигуры называют *подобными*.

Пусть в пространстве задана фигура F, точка O и число k ($k \neq 0$). Преобразование, переводящее произвольную точку X фигуры F в точку X_1, удовлетворяющую условию $\overline{OX_1} = k\overline{OX}$, называют *гомотетией относительно центра O с коэффициентом k* (рис. 61). Точку O называют *центром гомотетии*, а число k *коэффициентом гомотетии*.

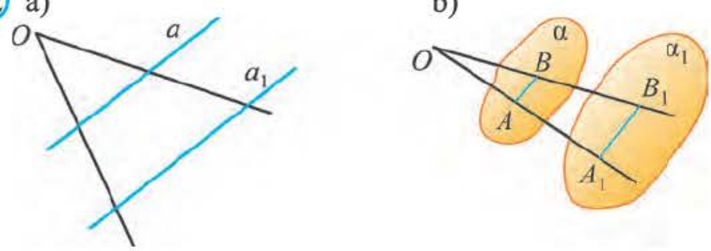
Если в результате такого преобразования каждой точки фигуры F получена фигура F_1, то говорят, что *фигура F гомотетична фигуре F_1*.

Вы видите, что определение гомотетии в пространстве аналогично соответствующему определению на плоскости. Следовательно, все свойства и их доказательства аналогичны. Поэтому, мы не будем доказывать их и рекомендуем провести их самостоятельно.

61



62



Гомотетия относительно точки O с коэффициентом k является преобразованием подобия.

Гомотетия с отличным от нуля коэффициентом k при $k=1$ отображает фигуру F в себя, а при $k=-1$ в фигуру F_1, симметричную фигуре F относительно точки O. В остальных случаях гомотетоя не сохраняет расстояния между точками, т. е. не является движением. В результате гомотетии расстояние между точками увеличивается в в одно и тоже число k раз, т. е. меняются измерения фигуры, но сохраняется её форма.

При гомотетии a) прямая отображается в параллельную ей прямую (рис. 62.a); b) плоскость – в параллельную ей плоскость (рис. 62.b), если они не проходят через центр гомотетии.

Если же прямая или плоскость проходят через центр гомотетии, то они отображаются в себя.

Задачи к теме и практические задания

83. В какую точку перейдёт точка: a) (3; –2; 3); b) (0; 2; –3); c) (2; –5; 0) при параллельном переносе на вектор $\overline{p}$ = (–2; 1; 4)?

84. При параллельном переносе точка A(4; 2; –8) перешла в точку (3; 7; –5). На какой вектор была сдвинута точка?

85. Докажите, что при параллельном переносе: a) прямая переходит в прямую; b) луч – в луч; c) плоскость – в плоскость; d) отрезок – в равный ему отрезок.

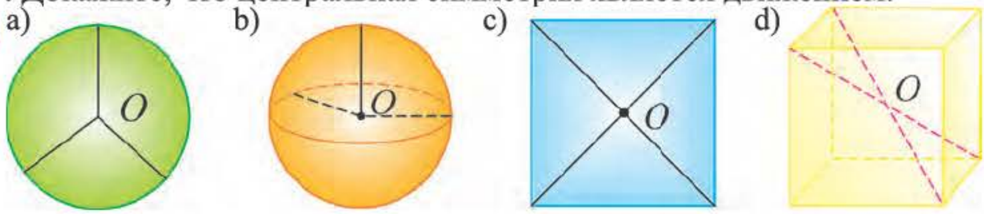
86. В какую точку перейдёт точка A (4; 2; –3) при центральной симметрии относительно точки O (–2; 3; –1)?

87. Докажите, что точка O есть центр симметрии фигур, изображённых на рисунке 63.

88. В какие точки перейдут точки (–2; 5; –9), (2; 2; –7), (–6; 12; –2) при центральной симметрии относительно начала координат?

89*. Докажите, что центральная симметрия является движением.

63



90*. Докажите, что симметрия относительно плоскости – движение.

91. Докажите, что параллелепипед является центрально симметричной фигурой относительно точки пересечения его диагоналей (рис. 50).

92. В какие точки перейдут точки (1; 2; –3), (0; 2; –3), (2; 2; –3) при центральной симметрии относительно координатных плоскостей?

93. Точка (2; 4; –1) при центральной симметрии относительно координатной плоскости перешла в точку (2; –4; –1). Относительно какой координатной плоскости был совершён этот переход?

94. Заполните пустые клетки следующей таблицы по 1- ому образцу.

№	Заданная точка	Симметричная ей точка	Относительно чего симметрия?
1	(1; 2; 3)	(1; 2; –3)	Относительно плоскости Oxy
2	(2; 4; –1)		Относительно плоскости Oxz
3		(1; 2; 3)	Относительно плоскости Oyz
4	(–1; –2; –3)	(–1; 2; 3)	
5	(–1; 6; 3)		Относительно оси Oy
6		(–3; 8; –2)	Относительно оси Oz
7	(4; 1; –2)		Относительно точки O

95. Обоснуйте, что точка O – центр симметрии фигур на рисунке 49.

96*. Покажите, что поворот относительно прямой является движением.

97. Покажите, что гомотетия относительно точки O с коэффициентом k есть преобразование подобия.

98. Покажите, что при симметрии относительно плоскости Oxy произвольная точка $(x; y; z)$ переходит в точку $(x; y; -z)$.

99. Покажите, что при симметрии относительно плоскости Oxz произвольная точка $(x; y; z)$ переходит в точку $x; -y; z)$.

100. Точка (1; 2; –1) при параллельном переносе перешла в точку (1; –1; 0). В какую точку перейдёт при этом переносе начало координат?

101. При параллельном переносе точка (3; 4; –1) перешла в точку (2; –4; 1). В какую точку перейдёт при этом переносе начало координат?

102*. Существует ли параллельный перенос, переводящий точку A (2; 1; 0) в точку B (1; 0; 1), а точку C (3; –2; 1) в точку D (2; –3; 0)?

103*. Существует ли параллельный перенос, переводящий точку $A(-2; 3; 5)$ в точку $B(1; 2; 4)$, а точку $C(4; -3; 6)$ в точку $D(7; -2; 5)$?

104. Определите в какие симметричные фигуры могут перейти живые и неживые объекты, изображённые на рисунке 58 в виде пространственных фигур. Отметьте их центр симметрии и начертите ось симметрии или плоскость симметрии (если это возможно).

105. Определите коэффициент подобия изображённых на рисунке 60 матрёшек.

106. Длины рёбер правильного тетраэдра равны 12 см. Чему равны длины рёбер тетраэдра гомотетичного данному с коэффициентом равным:

a) 3; b) –4; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{3}$?

107. Начертите произвольный треугольник ABC и отметьте некоторую точку O. Постройте треугольник гомотетичный треугольнику ABC относительно точки O с коэффициентом: a) 2; b) –3; c) $-\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{4}$.

108. Постройте произвольный тетраэдр $SABC$. Постройте тетраэдр гомотетичный тетраэдру $SABC$ относительно точки S с коэффициентом: a) 1,5; b) –2; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{4}$.

109. Начертите произвольный куб. Постройте фигуру, в которую перейдёт этот куб при гомотетии с центром в одной из его вершин и коэффициентом, равным: a) 2; b) –2; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$.

110. Найдите координаты точки, в которую перейдёт точка $A(-2; 3; 5)$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом, равным:

a) 2,5; b) –2,5; c) $\frac{1}{4}$; d) $-\frac{1}{4}$.

111. Найдите координаты точки, в которую перейдёт точка $A(2; 4; 0)$ при гомотетии с центром в точке $O(-1; 2; 2)$ и коэффициентом, равным:

a) 0,5; b) –2; c) $\frac{1}{4}$; d) $-\frac{1}{4}$.

112. Найдите координаты вершин тетраэдра, в который перейдёт тетраэдр с вершинами в точках $O(0; 0; 0)$, $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$ при гомотетии: a) с центром в точке O и коэффициентом, равным –1; b) с центром в точке A и коэффициентом, равным 2.

113*. Покажите, что гомотетия переводит не проходящие через ее центр: a) прямую, в параллельную ей прямую, а b) плоскость в параллельную ей плоскость.

114*. Покажите, что гомотетия переводит проходящие через её центр: a) прямую в ту же прямую, а b) плоскость в ту же плоскость.

4. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ ГЛАВЫ

4.1. 1 проверочный тест

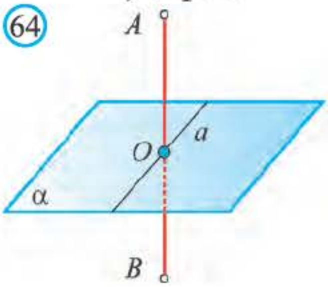
1. Заданы точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. что показывает $z_2 - z_1$?

A) координату середины отрезка AB; B) длину отрезка AB;
C) длину вектора $\overline{AB}$; D) одну из координат вектора $\overline{AB}$.

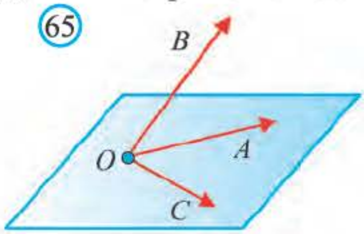
2. Если на рисунке 64 $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, $AO = OB$, то

A) точки A и B будут симметричны относительно точки O;
B) точки A и B будут симметричны относительно прямой a;
C) точки A и B будут симметричны относительно плоскости α;
D) отрезок AB будет симметричен относительно прямой a.

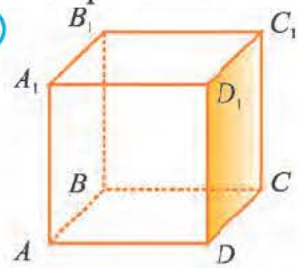
64



65



66



3. Точка B на рисунке 65 не лежит на плоскости AOC. Тогда векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ …

A) коллинеарны; B) компланарны;
C) сонаправлены; D) не компланарны.

4. Даны точки $M(-7; 1; 4)$ и $N(-1; -3; 0)$. Найдите координаты середины отрезка MN.

A) $(-4; -1; 4)$; B) $(-4; -1;2)$; C) $(-4; -2; 2)$; D) $(-3; 2; 2)$.

5. Даны точки $A(0; -3; 2)$ и $B(4; 0; -2)$. Где расположена середина отрезка AB?

A) на оси Ox; B) на оси Oy; C) на оси Oz; D) на плоскости Oxy.

6. Найдите расстояние от точки $A(3; 4; -3)$ до оси Oz.

A) 3; B) 5; C) $2\sqrt{3}$; D) $\sqrt{34}$.

7. Найдите сумму векторов $\overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF}$.

A) $\overline{O}$; B) $\overline{CF}$; C) $\overline{DF}$; D) $\overline{CE}$.

8. При каком значении m векторы $\overline{a}(m; 4; -3)$ и $\overline{b}(4; 8; -6)$ коллинеарны?

A) 2; B) 5; C) 1; D) 3.

9. Точка O не лежит в плоскости α. Гомотетия с центром в точке O переводит плоскость α в отличную от неё плоскость β. Если прямая a лежит в плоскости α, то …

A) $\alpha \parallel \beta$; B) плоскости α и β пересекаются;
C) $a \subset \beta$; D) $\alpha \perp \beta$.

10. Прямая AB перпендикулярна плоскости BCD. Скалярное произведение каких векторов равно нулю?

A) $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$; B) $\overline{BD}$ и $\overline{AD}$; C) $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$; D) $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

11. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром равным 1 (рис. 66). Найдите $(\overline{AB}+\overline{BC})\cdot\overline{BB}$.

A) 1; B) 0; C) –1; D) 0,5.

12. При каком значении p угол между векторами $\overline{a}(1;\ 1;\ 0)$ и $\overline{b}(0;\ 4;\ p)$ будет равен 60°?

A) 4; B) 4 или –4; C) 16; D) 16 или –16.

13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Отрезок A_1D при параллельном переносе переходит в отрезок D_1C. В какую плоскость перейдёт при этом переносе плоскость AA_1B_1?

A) DB_1B; B) DCC_1; C) AA_1C_1; D) ABC.

14. α – плоскость симметрии треугольника ABC. Какое из утверждений верно?

A) $(ABC)\perp\alpha$; B) треугольник ABC равнобедренный;
C) треугольник ABC имеет центр симметрии;
D) треугольник ABC имеет ось симметрии.

15. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите $\overline{A_1B_1}+\overline{BC}-\overline{DD_1}$.

A) $\overline{A_1C}$; B) $\overline{BD_1}$; c) $\overline{B_1D}$; D) $\overline{AC_1}$.

16. Какое геометрическое преобразование переводит одну из двух скрещивающихся прямых в другую?

A) параллельный перенос; B)симметрия относительно плоскости; C) поворот; D) гомотетия.

17. Найдите точку симметричную точке $M(-1;\ 2;\ -4)$ относительно плоскости.

A) (1; –2; 4); B) (1; 2; –4); C) (–1; –2; –4); D) (–1; 2; 4).

18. При параллельном переносе вектор $\overline{AB}$ перешёл в вектор $\overline{DC}$. Какое из утверждений верно?

A) $\overline{AB}=\overline{DC}$; B) середины отрезков AC и BD совпадают;
C) векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{DC}$; D) $ABCD$ параллелограмм.

19. Найдите расстояние от плоскости Oxz до точки B (–3; 2; –5).

A) 2; B) 5; C) 3; D) $\sqrt{34}$.

20. Точки $A(1;\ -2;\ 0)$, $B(1;\ -4;\ 2)$ и $C(3;\ 2;\ 0)$ – вершины треугольника ABC. Найдите длину медианы CM.

A) $2\sqrt{3}$; B) $3\sqrt{2}$; C) $\sqrt{6}$; D) 18.

21. Найдите $m+n$, если $\overline{a}(1;\ n;\ 2)$ и $\overline{b}(0{,}5m+1;\ 3;\ 1)$ коллинеарны.

A) 3; B) 5; C) –4; D) 9.

22. Разложите вектор $\overline{BA}$ по координатным векторам (ортам), если $A(-1; -9; -3)$, $B(0; -2; 1)$.

A) $\overline{BA} = \bar{i} + 9\bar{j} - \bar{k}$; B) $\overline{BA} = \bar{i} - 9\bar{j} + \bar{k}$;

C) $\overline{BA} = -\bar{i} - 9\bar{j} - 4\bar{k}$; D) $\overline{BA} = \bar{i} + 9\bar{j} - 4\bar{k}$.

23. Найдите угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$, если $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$.

A) 150°; B) 30°; C) 45°; D) 90°.

24. Найдите $|\bar{b}|$, если $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{a} + \bar{b}| = 11$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 7$.

A) 11; B) 18; C) 20; D) 7.

25. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Найдите сумму координат вектора $\overline{MN}$, если $\overline{AB}(-7; 4; 5)$, $\overline{AC}(3; 2; -1)$, $\overline{AD}(20; -4; -12)$, M и N – середины сторон AB и CD, соответственно.

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

4.2. Задачи

115. Найдите координаты середины отрезка с концами в точках $A(1; -2; 4)$ и $B(3; -4; 2)$.

116. Найдите x, если точка $A(x; 0; 0)$ равноудалена от точек $B(1; 2; 3)$ и $C(-1; 3; 4)$.

117. Точка $A(1; -5; 4)$ – один их концов отрезка, а точка $C(4; -2; 3)$ – его середина. Найдите координаты второго конца этого отрезка?

118. Найдите точку симметричную точке $A(1; 2; 3)$ относительно плоскости Oxz.

119. Найдите точку симметричную точке $A(1; 2; 3)$ относительно начала координат.

120. Найдите точку симметричную точке $(1; 2; 3)$ относительно плоскости Oxy..

121. Найдите точку симметричную точке $(2; -3; 5)$ относительно оси Oy.

122. Которая из точек $A(2; -3; 0)$; $B(2; 0; -5)$; $C(1; 0; -4)$; $D(0; 9; -7)$; $E(1; 0; 0)$ лежит на плоскости Oyz?

123. Которая из точек $A(-4; 3; 0)$; $B(0; -7; 0)$; $C(2; 0; -8)$; $D(2; -4; 6)$; $E(0; -4; 5)$ лежит на плоскости Oxz?

124. Найдите расстояние от точки $A(-3; 8; 3\sqrt{33})$ до оси Ox.

125. Даны точки $A(3; -2; 5)$ и $B(-4; 5; -2)$. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$.

126. Найдите координаты начала вектора $\bar{a}(1; -2; 3)$, если его конец расположен в точке $B(2; 0; 4)$.

127. Найдите координаты начала вектора $\overline{a}(2; -3; 1)$, если его конец расположен в точке $B(0; 4; 2)$.

128. Длина вектора $\overline{a}(x; 1; 2)$ равна 3. Найдите значение x.

129. Модуль вектора $\overline{a}(4;-12; z)$ равен 13. Найдите значение z.

130. Найдите длину вектора $\overline{c} = 2\overline{a} - \overline{b}$, если $\overline{a}(6; 2; 1)$ и $\overline{b}(0; -1; 2)$.

131. Найдите длину вектора $\overline{m} = 4\overline{p} + 2\overline{q}$, если $\overline{p}(2; 5; -1)$ и $\overline{q}(0; -7; 2)$.

132. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}(2; -3; 4)$ и $\overline{b}(-2; -3; 1)$.

133. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{m}(-1; 5; 3)$ и $\overline{n}(2; -2; 4)$.

134. При каком значении m векторы $\overline{a}(1; m; -2)$ и $\overline{b}(m; 3; -4)$ перпендикулярны?

135. При каком значении n векторы $\overline{a}(n; -2; 1)$ и $\overline{b}(n; n; 1)$ перпендикулярны?

136. При каком значении m векторы $\overline{a} = m\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ и $\overline{b} = 4\overline{i} + m\overline{j} - 7\overline{k}$ перпендикулярны?

137. Даны точки $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. Найдите угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

138. При каком значении n векторы $\overline{a}(2; n; 6)$ и $\overline{b}(1; 2; 3)$ коллинеарны?

139. При каком значении m векторы $\overline{a}(2; 3; -4)$ и $\overline{b}(m; -6; 8)$ параллельны?

140. При каких значениях m и n векторы $\overline{a}(-1; m; 2)$ и $\overline{b}(-2; -4; n)$ коллинеарны?

141. Даны точки $A(2; 7; -3)$ и $B(-6; -2; 1)$. Разложите вектор $\overline{BA}$ по координатным векторам (ортам).

4.3. Образец 1- ой контрольной работы

1. Найдите точку, симметричную точке (1; 2; 3) относительно плоскости Oxy.
2. Найдите длину вектора $\overline{c} = 2\overline{a} - \overline{b}$, если $\overline{a}(6; 2; 1)$ и $\overline{b}(0; -1; 2)$.
3. Даны точки $A(2; -1; 0)$ и $B(-2; 3; 2)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка AB.
4. Даны точки $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. Найдите угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.
5. (*Дополнительная задача для хорошо успевающих учащихся*). Найдите длину медианы BD треугольника с вершинами в точках $A(4; 5; 1)$, $B(2; 3; 0)$ и $C(2; 1; -1)$.

ГЛАВА II. ПРИЗМА И ЦИЛИНДР

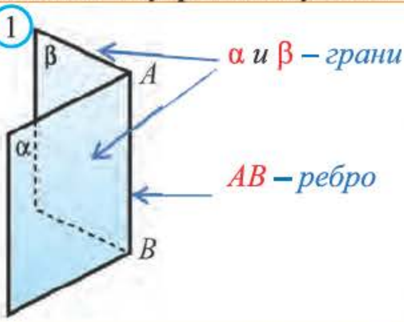
5. МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ И МНОГОГРАННИКИ

5.1. Многогранные углы

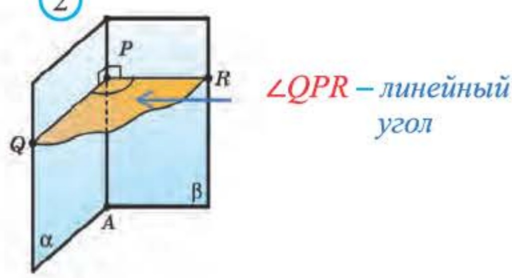
С двугранным углом вы познакомились в 10 классе.

Геометрическую фигуру, состоящую из двух полуплоскостей (*грани*) α и β с общей их ограничивающей прямой *AB* (*ребро*) называют *двугранным углом* (рис. 1) и обозначают (α β).

1



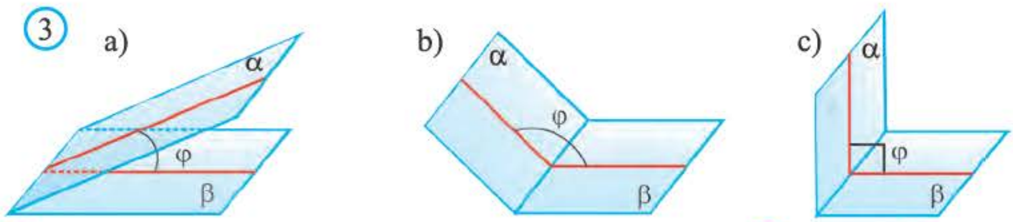
2



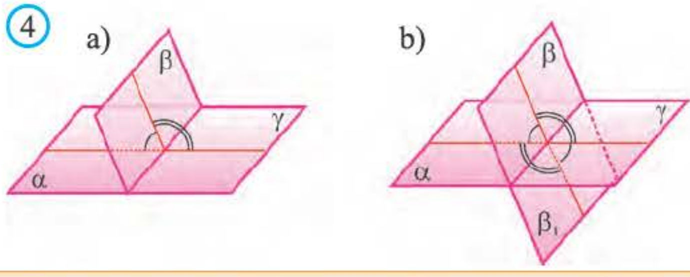
Начертим лучи *PR* и *PQ*, проходящие через произвольную точку *P* на рёбре двугранного угла и перпендикулярные ему. Угол $\angle QPR$ – называют *линейным углом* двугранного угла (рис. 2).

Двугранные углы также как и плоские углы делят по величине на *острые, прямые и тупые* (рис. 3). Также как и плоские углы двугранные углы могут быть *смежными и вертикальными* (рис. 4).

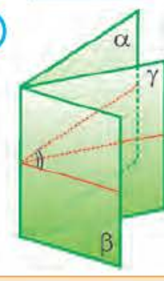
3



4



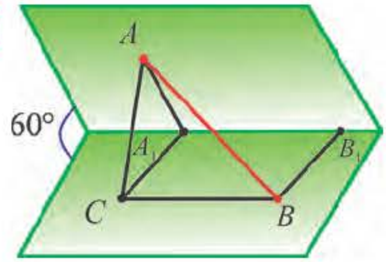
5



Полуплоскость, делящую двугранный угол на два равных двугранных угла, называют *биссектором* (рис. 5).

Задача 1. Из точек A и B, лежащих на гранях двугранного угла, линейный угол которого равен 60°, к его рёбру проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (рис. 6). Найдите длину отрезка AB, если $AA_1 = 12$, $BB_1 = 10$ и $A_1B_1 = 13$.

6



Решение. Проведем прямые $BB_1 || CA_1$ и $A_1B_1 || CB$. Полученный четырёхугольник A_1B_1BC – параллелограмм. Прямая A_1B_1 будет перпендикулярна плоскости треугольника A_1AC, так как она перпендикулярна двум лежащим на ней прямым A_1A и A_1C. Тогда и прямая BC будет перпендикулярна этой плоскости.

Следовательно, треугольник ABC – прямоугольный.

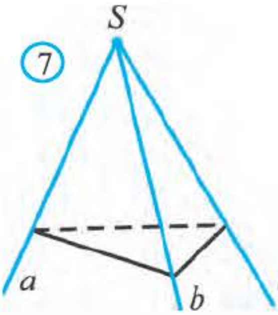
По теореме косинусов:

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 124.$$

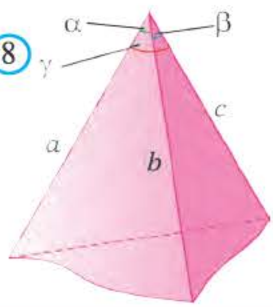
А по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{124 + 169} = \sqrt{293}.$

Ответ: $AB = \sqrt{293}$. □

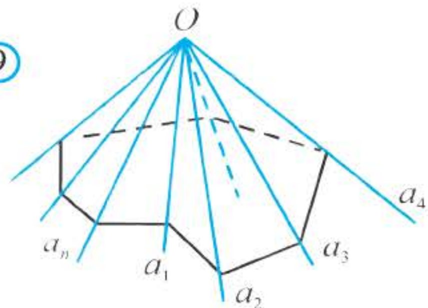
7



8



9



В пространстве три исходящих из одной точки луча a, b и c образуют три плоских угла (ab), (bc) и (ac) (рис.7). Фигуру (abc), полученную из этих плоских углов, называют *трёхгранным углом*.

Плоские углы трёхгранного угла называют его *гранями*, их стороны – *рёбрами*, а общую вершину – *вершиной* трёхгранного угла.

Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называют *двугранными углами* трёхгранного угла.

Три плоских угла (ab), (bc) и (ac) называют также *плоскими углами* трёхгранного угла.

Плоские углы трёхгранного угла обозначают соответственно α, β, γ (рис. 8), для них выполняется неравенство треугольника, т. е. любой из них меньше суммы двух других углов: $\alpha+\beta<\gamma$, $\alpha+\gamma<\beta$, $\beta+\gamma<\alpha$ и сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 360°: $\alpha+\beta+\gamma<360°$.

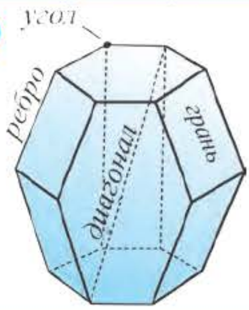
Аналогично определяется понятие многогранного угла (рис. 9).

5.2. Многогранники

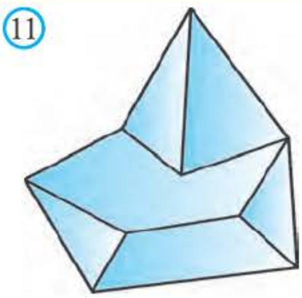
Если вы заметили, то до сих пор мы изучали в качестве пространственных фигур свойства ряда тел, в частности многогранников. Эти пространственные фигуры называются *телами*, поскольку их можно представить в виде части пространства, занятой каким-либо телом и ограниченной поверхностью. Напомним некоторые понятия, касающиеся многогранников.

Многогранником называют тело, ограниченное плоскими многоугольниками (рис. 10).

10

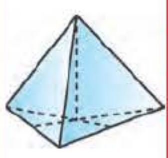
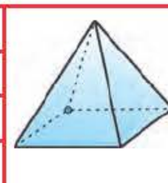
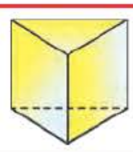
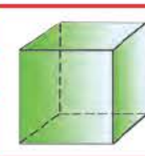


11



Если многоугольник расположен по одну сторону от плоскости каждой грани, то его называют *выпуклым многогранником*. На рисунке 10 изображён выпуклый, а на рисунке 11 не выпуклый многогранник.

Обозначим число граней произвольного выпуклого многогранника Y, число его вершин U, число его рёбер Q. Заполним следующую таблицу для известных нам многогранников:

	Название многогранника	Y	U	Q	
	Треугольная пирамида	4	4	6	
	Четырёхугольная пирамида	5	5	8	
	Треугольная призма	5	6	9	
	Четырёхугольная призма	6	8	12	
	n- угольная пирамида	$n+1$	$n+1$	$2n$	
	n- угольная призма	$n+2$	$2n$	$3n$	

Из таблицы получаем, что $Y+U-Q=2$ для любого многогранника. Известно, что это соотношение верно для любого выпуклого многогранника. Это доказал в 1752 году швейцарский математик Леонард Эйлер.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место соотношение: $Y + U - Q = 2$, где Y– число граней, U– число вершин, Q– число рёбер многогранника.

Примем её без доказательства. Из нее вытекают следующие следствия. Докажите их самостоятельно, используя теорему Эйлера.

1 следствие. Число плоских углов многогранника в два раза больше числа его рёбер.

2 следствие. Число плоских углов многогранника чётно.

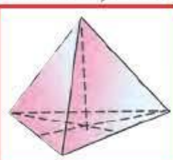
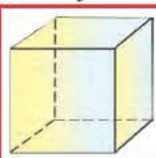
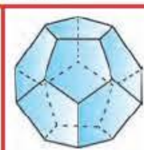
3 следствие. Если в каждой вершине многогранника сходится одно и тоже число рёбер k, то справедливо равенство $U \cdot k = 2Q$.

4 следствие. Если все грани многогранника являются равными n-угольниками, то справедливо равенство $Y = 2Q$.

5 следствие. $360°(Y - Q)$ – сумма всех плоских углов многогранника.

Выпуклый многогранник называют *правильным*, если его грани являются равными правильными многоугольниками и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число рёбер.

Известно всего пять видов правильных многогранников (проверьте это самостоятельно). Это следующие многогранники:

Фигуры					
Название и его толкование	правильный тетраэдр (4-гранник)	Куб, гексаэдр (6-гранник)	Октаэдр (8-гранник)	Додекаэдр (12-гранник)	Икосаэдр (20-гранник)
Грани	правильный треугольник	правильный четырёхугольник	правильный треугольник	правильный пятиугольник	правильный треугольник
Число граней	4	6	8	12	20
Число рёбер	6	12	12	30	30
Число вершин	4	8	6	20	12
Число рёбер, исходящих из одной вершины	3	3	4	3	5

Исторические сведения

Все правильные многогранники были известны в Древней Греции. XIII книга знаменитых «Начал» Евклида посвящена правильным многогранникам. Их чаще называют телами Платона. Великий ученых Древней Греции Платон (424-347 гг. до н.э.) в своём идеалистическом изображёнии мира сравнивает четыре таких тела с 4 элементами вселенной: тетраэдр – пламя, декаэдр – земля, октаэдр – воздух, икосаэдр – вода. А пятый многогранник – додекаэдр называет знаком строения всей вселенной («пятой основой»).

В XVIII веке в теорию многогранников внёс ощутимый вклад Леонард Эйлер (1707-1783) о связи вершин, граней и сторон в выпуклом многоугольнике, изданная в 1758 году и её доказательство упорядочили мир всевозможных многогранников.

Задачи к теме и практические задания

142. Угол между плоскостями равен 47°. Найдите градусную меру двугранных углов, образованных пересечением этих плоскостей.

143. Градусная мера двугранного угла равна 52°. Чему равна градусная мера смежного с ним двугранного угла?

144. Найдите угол между прямыми перпендикулярными гранями двугранного угла, плоский угол которого равен 100°.

145. Чему равна градусная мера двугранного угла, образованного биссекторами смежных двугранных углов?

146. Точка A расположена на биссекторе двугранного угла, градусная мера которого равна 60°. Найдите расстояние от этой точки до граней двугранного угла, если расстояние от неё до рёбра двугранного угла равно 10 см.

147. Расстояние от точки A, расположенной на одной из граней двугранного угла с градусной мерой 30°, до второй грани равно 6 см. Найдите расстояние от этой точки до рёбра двугранного угла.

148*. Точка A расположена на расстоянии 3 дм и 4 дм до граней прямого двугранного угла. Найдите расстояние от этой точки до его рёбра.

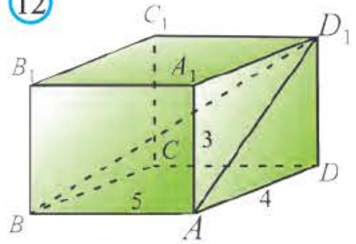
149*. Докажите, что все двугранные углы правильного тетраэдра равны и найдите их градусную меру.

150. Существует ли трехгранный угол, плоские углы которого равны: a) 30°; 60°; 20°; b) 45°; 80°; 130°; c) 30°; 60°; 20°; d) 20°; 60°; 70°; e) 76°; 34°; 110°?

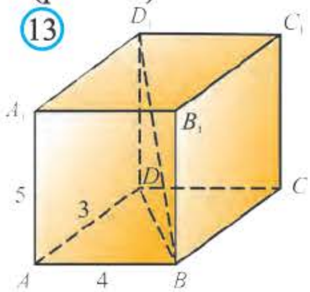
151*. Докажите, что сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

152. В прямоугольном параллелепипеде найдите угол ABD_1, если $AB=5$, $AD=4$ и $AA_1=3$ (рис. 12).

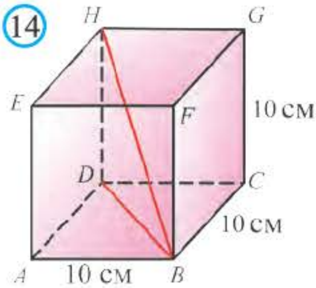
12



13



14



153. В прямоугольном параллелепипеде найдите угол DBD_1, $AB=4$, $AD=3$ и $AA_1=5$ (рис. 13).

154. Найдите угол DBH куба изображённого на рисунке 14.

155*. Докажите, что сумма всех плоских углов выпуклого многогранника с n свершинами равна $360°(n-2)$.

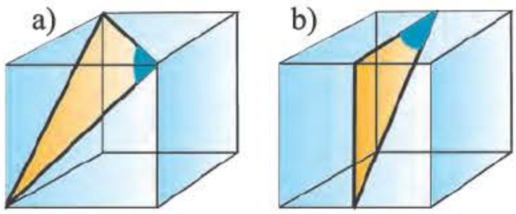
156*. Докажите, что число плоских углов многогранника в два раза больше числа его рёбер.

157*. Докажите, что число плоских углов многогранника всегда чётно.

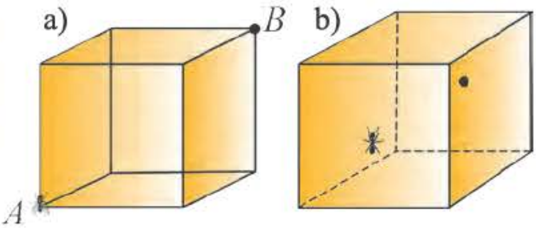
158*. Докажите, что сумма плоских углов многогранника равна $360°(Y-Q)$.

159. Определите величину угла, выделенного в кубе, изображённого на рисунке 15.

15



16



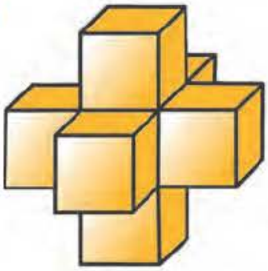
160*. Укажите кратчайший путь мухи, находящейся на поверхности куба, изображённого на рисунке 16: a) от вершины A до вершины B; b) от центра куба до центра противоположной грани (указание: воспользуйтесь развёрткой куба).

161. Будет ли пространственная фигура, изображённая на рисунке 17, правильным многогранником? Сколько квадратов составляют его поверхность? Сколько вершин и рёбер у этой фигуры?

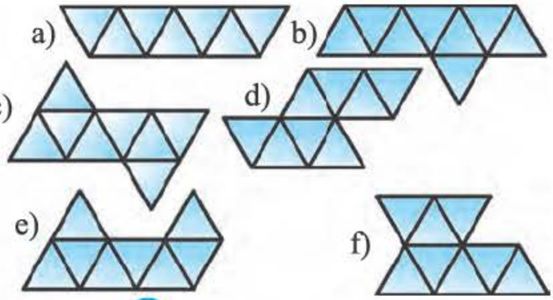
162. Какая из развёрток на рисунке 18 является развёрткой октаэдра?

163. Обоснуйте, что на рисунке 19 многогранник, вписанный в куб: a) правильный тетраэдр; b) октаэдр.

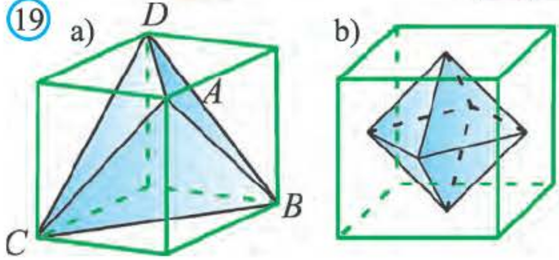
17



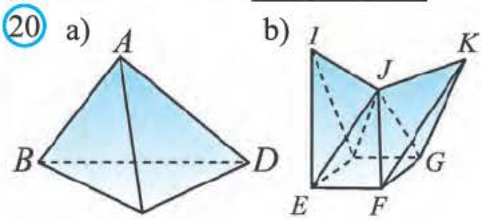
18



19



20



164. Проверьте справедливость уравнения Эйлера для многогранников, изображённых на рисунке 20, определив число их вершин, рёбер и граней.

165. Из каждой вершины выпуклого многогранника исходит три рёбра. Сколько вершин и граней имеет этот многогранник, если число его рёбер равно: a) 12; b) 15?

166*. Существует ли многогранник имеющий 13 граней, каждая из которых имеет 13 рёбер?

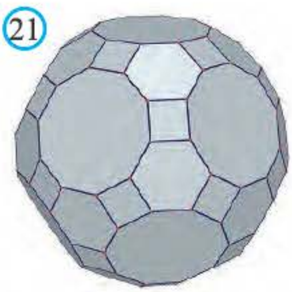
167. Из каждой вершины выпуклого многогранника исходит четыре рёбра. Сколько вершин и граней имеет этот многогранник, если число его рёбер равно 12?

168. Найдите число вершин, рёбер и граней: a) правильного тетраэдра; b) куба; c) октаэдра; d) додекаэдра; e) икосаэдра и проверьте справедливость уравнения Эйлера для этих многогранников.

169. Найдите число граней правильного многогранника, у которого 8 вершин и 12 рёбер и назовите его.

170. Найдите число граней правильного многогранника, у которого 6 вершин и 12 рёбер и назовите его.

21



171. Найдите число рёбер правильного многогранника, у которого 10 вершин и 7 граней.

172. Найдите число граней правильного многогранника, у которого 14 вершин и 21 ребро.

173. Найдите число рёбер многогранника на рисунке 21, у которого 62 грани и 120 вершин.

6. ПРИЗМА И ЕЁ ПОВЕРХНОСТЬ

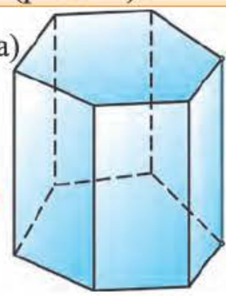
6.1. Призма и её сечения

С призмой вы уже знакомы. Несмотря на это, мы напомним определение призмы и её свойства.

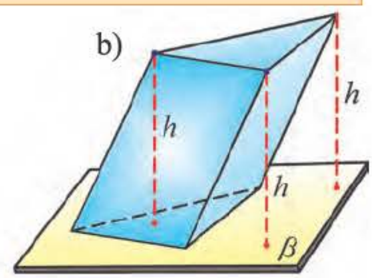
Призма – это многогранник, две грани которого равные n-угольники (основания), лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней – параллелограммы (рис. 22).

22

23 a)

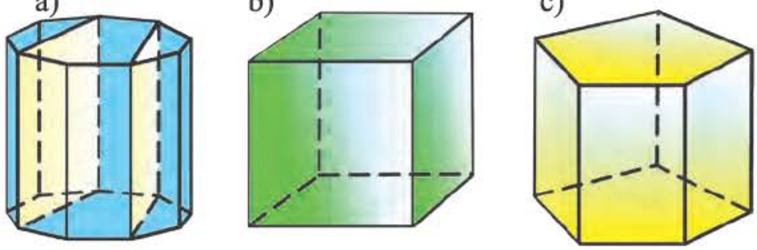


b)

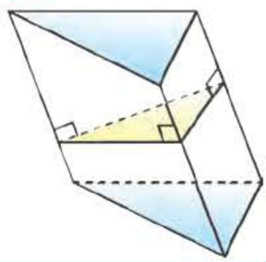


В зависимости от того перпендикулярны ли боковые грани призмы его основаниям или нет, призмы делят на *прямые* или *наклонные.* На рисунке 23.a изображёна прямая призма, а на рисунке 23.b – наклонная. Очевидно, что боковые грани прямой призмы – прямоугольники.

24 a) b) c)



25



Если основания прямой призмы являются правильными многоугольниками, то её называют *правильной* (рис. 24). Боковые грани правильной призмы это равные между собой прямоугольники.

Перпендикуляр, опущенный из некоторой точки одного основания к другому, называют его *перпендикуляром* (рис. 23.b).

Сечение призмы, проходящее через соответствующие диагонали его оснований, называют *диагональным сечением* (рис. 24.a) и их число равно числу диагоналей одного из оснований.

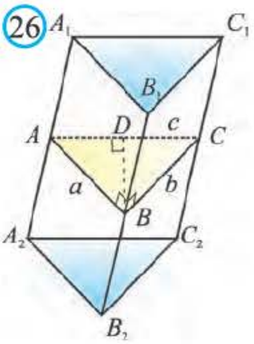
Перпендикулярным сечением призмы называют сечение перпендикулярное всем его боковым рёбрам (рис. 25).

Так как $\dfrac{n(n-3)}{2}$ – число диагоналей выпуклого n-угольника, то число диагональных сечений n-угольной призмы также равно $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

В каждом диагональном сечении призмы можно провести две диагонали. Следовательно, n-угольная призма имеет $n(n-3)$ диагоналей.

Задача 1. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми рёбрами соответственно равны 7 см, 15 см и 20 см. Найдите расстояние между большей боковой гранью и противолежащим боковым ребром.
Решение. Известно, что расстояние между параллельными прямыми равно длине перпендикуляра, опущенного из произвольной точки одной прямой на другую. Тогда длины сторон перпендикулярного сечения ABC (рис. 26). Наибольшая грань призмы проходит через наибольшую сторону AC=20 см этого сечения. Расстояние от рёбра призмы B_2B_1 до плоскости грани $A_2A_1C_1C_2$ равно высоте BD треугольника ABC. Тогда по формуле Герона получаем:

26



$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2},$$
$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+15+20}{2} = 21,$$
$$S_{ABC} = \sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)} = \sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1} = 42.$$

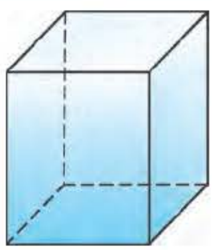
Сдругой стороны, $S_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BD}{2}$.
Отсюда $42 = \dfrac{AC \cdot BD}{2}$ или $BD = 4{,}2$ см.
Ответ: 4,2 см.

6.2. Параллелепипед и куб

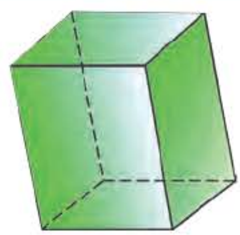
Призма, основаниями которой являются параллелограммы, называют *параллелепипедом* (рис. 27). Параллелепипеды также как и призмы могут быть прямыми (рис. 27.a) и наклонными (рис. 27.b).

27

a)



b)



Грани параллелепипеда, не имеющие общую вершину, называют *противоположными гранями*.

У параллелепипеда:

– 12 рёбер, каждые четыре из которых равны (рис. 28.a),

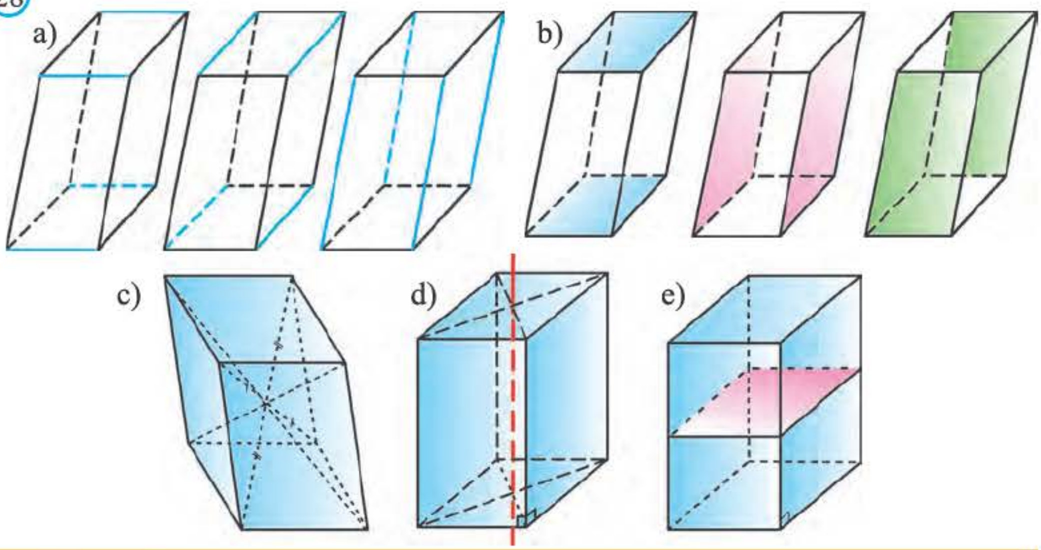
– 6 граней, которые попарно параллельны и равны (рис. 28.b),

– 4 диагонали, которые пересекаются и точкой пересечения делятся пополам (рис. 28.c),

– точка пересечения диагоналей – центр его симметрии (рис. 28.c).

Прямой параллелепипед имеет ось симметрии (рис. 28.d) и плоскость симметрии (рис. 28.e).

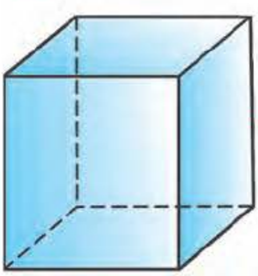
28



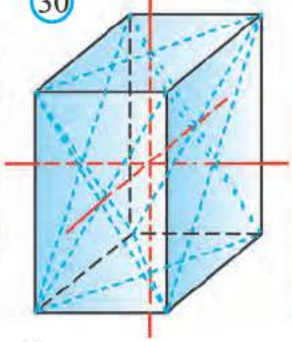
Прямой параллелепипед, основания которого являются прямоугольники, называют *прямоугольным параллелепипедом* (рис. 29).

Очевидно, что все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

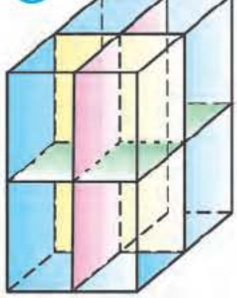
29



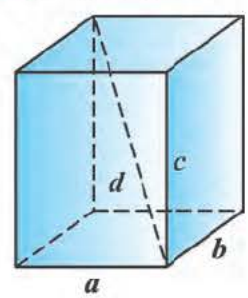
30



31



32 $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$



Прямоугольный параллелепипед имеет три оси симметрии (рис. 30) и три плоскости симметрии (рис. 31).

Длины трех рёбер, исходящих из одной вершины прямоугольного параллелепипеда называют его *измерениями*.

Свойство: В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали d равен сумме квадратов его измерений: a, b и c (рис.32):

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

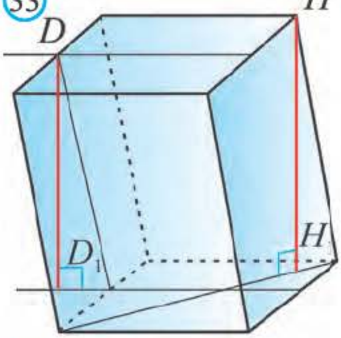
Прямоугольный параллелепипед, все измерения которого равны, называют *кубом*. Очевидно, что все грани куба являются равными квадратами. Куб имеет один центр симметрии, 9 осей симметрии и 9 плоскостей симметрии.

Выше были перечислены свойства призмы. Некоторые из них были оказаны в 10 классе. Доказательства остальных свойств проще, поэтому их доказательства вы можете провести самостоятельно.

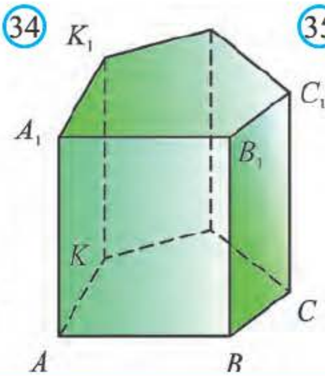
6.3. Площади боковой и полной поверхности призмы

На рисунке 33 проведены высоты HH_1 DD_1 призмы $ABCDE$-$A_1B_1C_1D_1E_1$. Очевидно, что высоты правильной призмы будут равны её боковому рёбру.

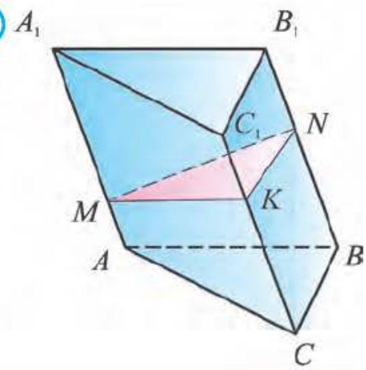
33



34



35



Боковая поверхность призмы (точнее, *площадь боковой поверхности*) равна сумме боковых поверхностей ее граней, а *полная поверхность* равна сумме боковой поверхности и площадей двух ее оснований.

$$S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}.$$

Теорема. Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра её основания на высоту:

$$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h.$$

Доказательство. Пусть высота данной прямой призмы равна h, а периметр основания $P = AB + BC + \ldots + KA$ (рис. 34). Известно, что каждая грань прямой призмы является прямоугольником. Основания пряугольников равны соответствующим сторонам основания призмы, а высоты равны высоте призмы.

Тогда $S_{бок} = AB \cdot h + BC \cdot h + \ldots + KA \cdot h = (AB + BC + \ldots KA) \cdot h = P \cdot h.$ $\square$

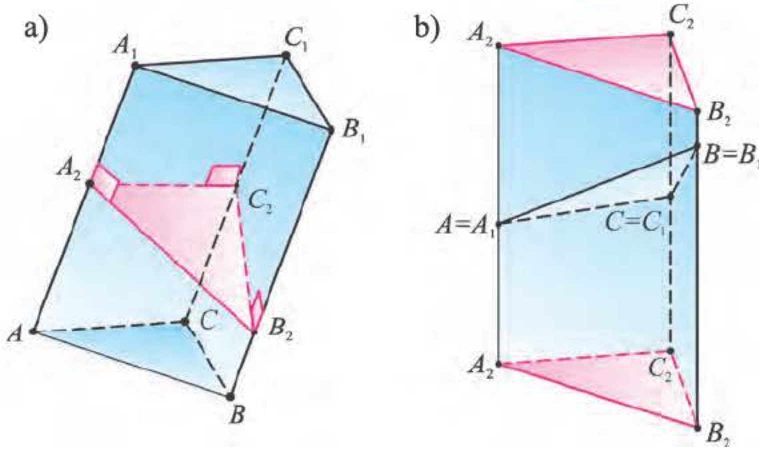
Теорема. Боковая поверхность произвольной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на ее боковое ребро:

$$S_{бок.} = P \cdot l.$$

Доказательство. Пусть периметр перпендикулярного сечения призмы равен P (рис. 35). Сечение делит призму на две части (рис. 36.а). Совершим параллельный перенос одной из этих частей так, чтобы основания нашей призмы совпали. В результате мы получим новую прямую призму (рис. 36.b). Очевидно, что, боковая поверхность этой призмы равна боковой поверхности данной. Её основанием является перпендикулярное сечение, а боковое ребро равно l.

Тогда по доказанной выше теореме: $S_{бок.} = P \cdot l.$ □

36 а) b)



Задачи к теме и практические задания

174. Найдите полную поверхность тетраэдра, если площадь одной её грани равна 6 см^2.

175. Найдите полную поверхность октаэдра, если площадь одной её грани равна 5,5 см^2.

176. Найдите полную поверхность додекаэдра, если площадь одной её грани равна 6,4 см^2.

177. Найдите площадь каждой грани и ребро куба, если его полная поверхность равна 105,84 см^2.

178. Найдите площадь каждой грани и ребро октаэдра, если его полная поверхность равна $32\sqrt{3}$ см^2.

179. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как 7:24, площадь его диагонального сечения равна 50 дм^2. Найдите его боковую поверхность.

180*. Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 1 м. Стороны основания 23 м и 11 м. Диагонали основания относятся как 2:3. Найдите площади диагональных сечений.

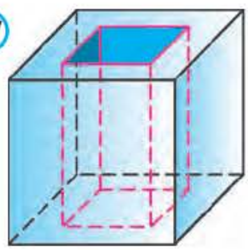
181. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 3 см и 5 см, одна из диагоналей основания 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите длины его диагоналей.

182. Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 5 м, стороны основания 6 м и 8 м, одна из диагоналей основания 12 м. Найдите диагонали параллелепипеда.

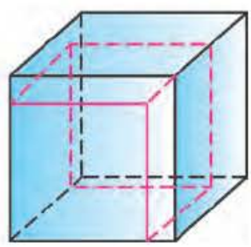
183*. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 3. Проведена плоскость, проходящая через его ребро и середину его оси. Найдите площадь этого сечения.

184. Высота прямой треугольной призмы равна 50 см, стороны основания 40 см, 13 см и 37 см. Найдите полную поверхность призмы.

37



38



185*. Из единичного куба со стороной 1, изображённого на рисунке 37, вырезана правильная призма, со стороной основания 0,5 и боковым ребром 1. Найдите полную поверхность оставшейся части куба.

186. При увеличении рёбра куба на 1 единицу, его полная поверхность увеличилась на 54 единицы. Найдите ребро куба. (рис. 38).

187. Основание наклонной призмы $ABCC_1B_1A_1$ – равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=AC=10$ см и $BC=12$ см. Вершина A_1 равноудалена от вершин A, B и C и $AA_1=13$ см. Найдите полную поверхность призмы.

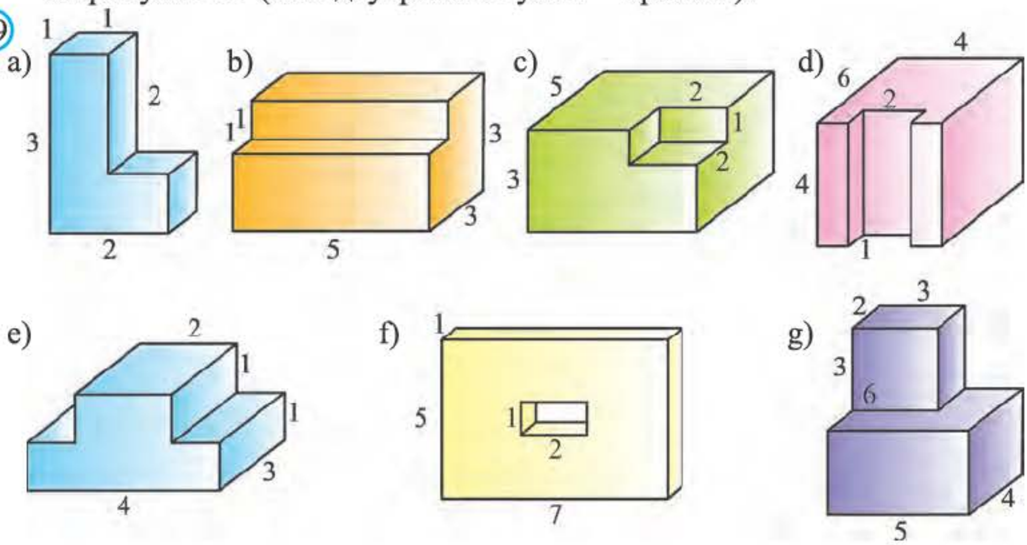
188. Боковая поверхность правильной четырёхугольной призмы равна 160, полная поверхность 210. Найдите диагональ основания призмы.

189. Расстояние между параллельными прямыми, на которых лежат боковые рёбра наклонной треугольной призмы равны 2 см , 3 см и 4 см, а боковое ребро 5 см. Найдите боковую поверхность призмы.

190. Сумма длин рёбер куба равна 96. Найдите его боковую поверхность.

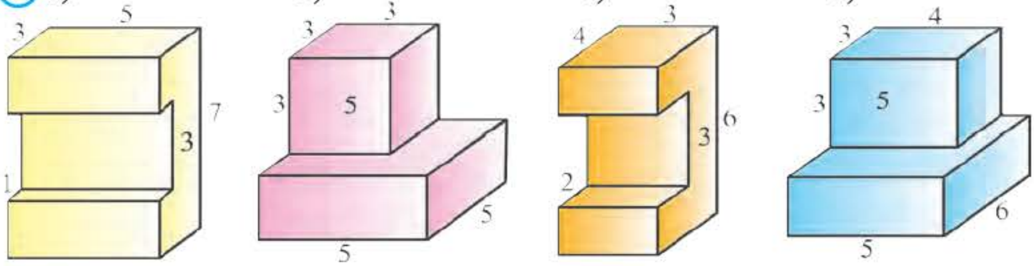
191. Вычислите полную поверхность многогранников, изображённых на рисунке 39 (все двугранные углы – прямые).

39



192. Вычислите полную поверхность многогранников, изображённых на рисунке 40 (все двугранные углы – прямые).

40



193. Боковое ребро правильной шестиугольной призмы 8 см, а сторона основания 3 см. Найдите сумму длин всех рёбер призмы.

194. Сторона основания прямоугольного параллелепипеда 6 см, высота призмы 5 см. Найдите площадь его диагонального сечения.

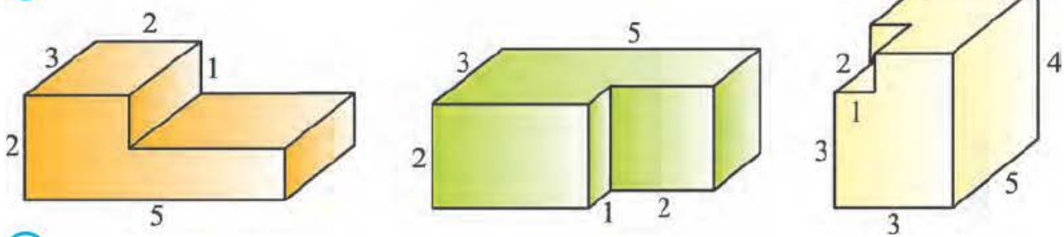
195. Сторона основания правильной треугольной призмы 6 см, а боковое ребро 12 см. Найдите боковую поверхность призмы.

196. Вычислите полную поверхность многогранников, изображённых на рисунке 41 (все двугранные углы – прямые).

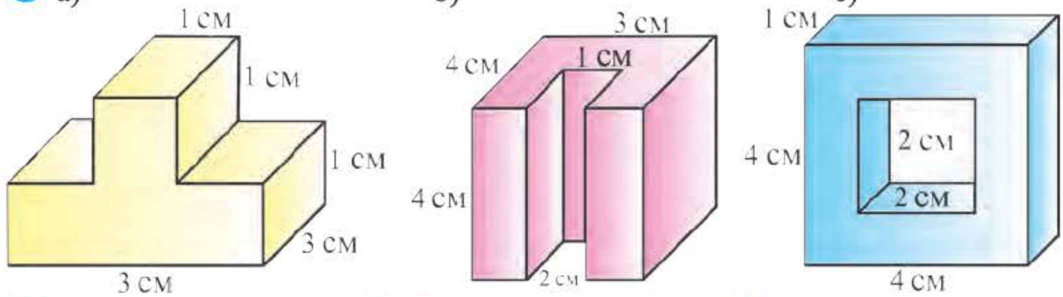
197. Вычислите полную поверхность многогранников, изображённых на рисунке 42 (все двугранные углы – прямые).

198*. На рисунке 43 измерения основания дома 6 м и 8 м. Крыша дома построена под углом 45°. Найдите площадь крыши дома.

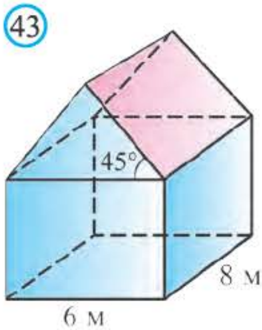
41 a) b) c)



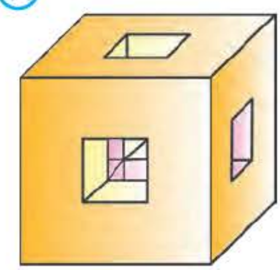
42 a) b) c)



43



44



45

199. Ребра параллелепипеда, исходящие из одной вершины равны 6 см, 8 см и 12 см. Найдите сумму длин всех рёбер параллелепипеда.

200. Площади граней параллелепипеда, имеющие общую вершину, равны 6 см^2, 12 см^2 и 16 см^2. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

201*. Основание поперечного сечения куба с ребром равным 3 см, пересекающее все его рёбра, – вырезает квадратные отверстия со стороной 1 см. (рис. 44). Найдите площадь полной поверхности оставшейся части куба.

202*. Поверхность футбольного мяча состоит из 12 правильных пятиугольников и 20 правильных шестиугольников, рёбра которых равны 5 см (рис. 45). Найдите полную поверхность футбольного мяча. Найдите стоимость мяча, если квадратный сантиметр кожи, из которой он сделан, стоит 60 сумов и на швы и обрезки расходуется ещё 10 процентов материала.

7. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ

7.1. Понятие объёма

Одним из свойств, характеризующих геометрические тела в пространстве, является понятие объёма. Каждый предмет (тело) занимает некоторую часть пространства. Например, кирпич по сравнению со спичечным коробком занимает большую часть пространства. Для сравнения этих частей между собой вводится понятие объёма.

Объём – это величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1. Любое тело имеет определённый объём, выраженный положительным числом.

2. Равные тела имеют равные объёмы.

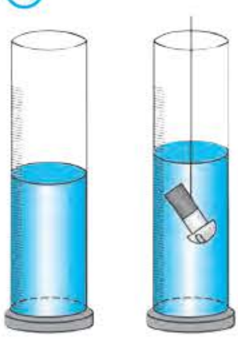
3. Если тело разбито на несколько частей, то его объём равен сумме объёмов этих частей.

4. Объём куба, ребро которого равно единице, равен единице.

Объём – также как длина и площадь, является величиной. В зависимости от выбора единицы длины, объём единого куба измеряют в *кубических единицах*: 1 см^3, 1 дм^3, 1 м^3 и т. д.

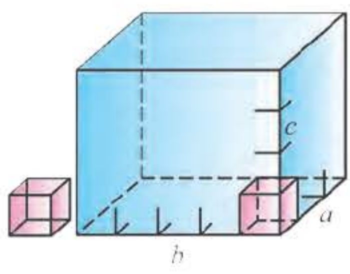
Объёмы тел измеряют различными способами или вычисляют. Например, объёмы маленьких предметов можно измерить с помощью сосудов (мензурки) с мелкими делениями (шкалами) (рис. 46). А объём ведра можно измерить с помощью сосуда, имеющего единичный объём, наполнив его водой (рис. 47). Но таким способом мы не можем измерить объёмы всех тел. В таких случаях объём вычисляют различными способами. Ниже рассмотрим их без доказательств.

46

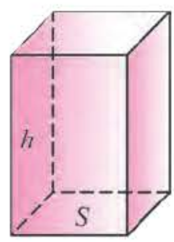


47

48



49



7.2. Объём параллелепипеда

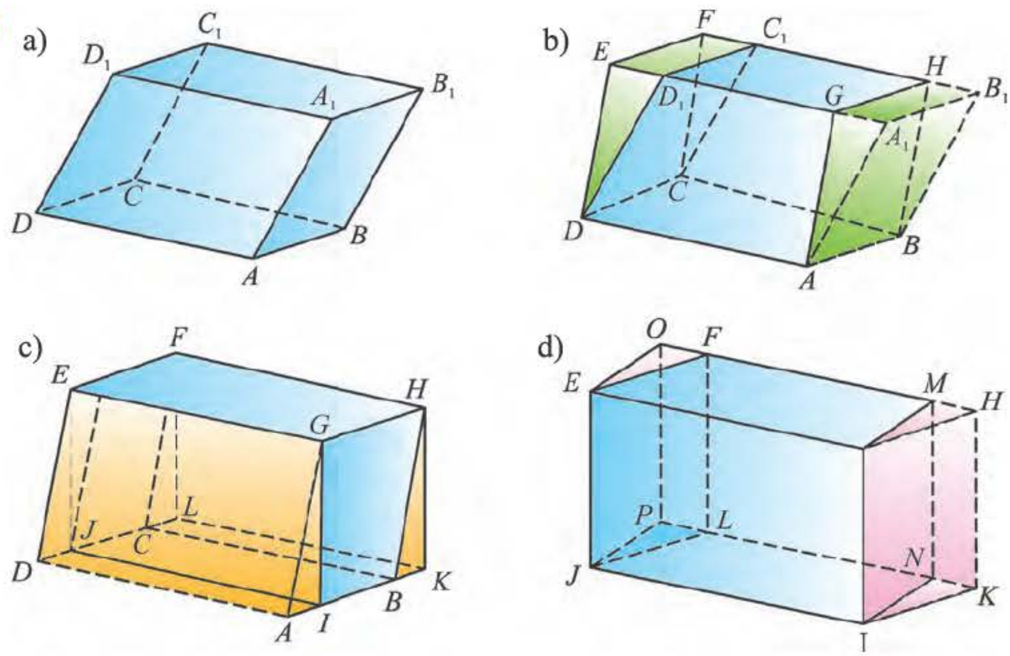
Теорема. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерний (рис. 48): $\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$.

Следствие. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту (рис. 49): $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

Теорема. Объём произвольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту (рис. 50): $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

Это свойство вытекает из вышеупомянутого следствия. На рисунке 50 показано как данный параллелепипед преобразовать в прямоугольный параллелепипед. Воспользовавшись этим самостоятельно обоснуйте свойство.

50



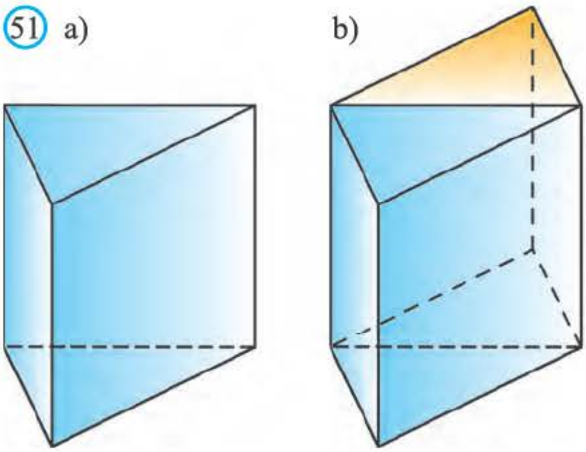
7.3. Объём призмы

Теорема. Объём прямой призмы равен произведению площади его основания на высоту (рис. 51): $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

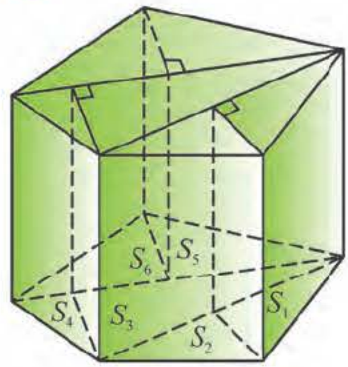
Доказательство. 1 случай. Пусть основанием призмы будет прямоугольный треугольник (рис 51.a). Эту призму можно дополнить равной ей призмой до прямоугольного параллелепипеда (рис. 51.b).

Если объём данной призмы, площадь её основания и высота V, S и h, то объём полученного прямоугольного параллелепипеда, площадь его основания и высота будут соответственно равны $2V$, $2S$ и h.

51 a) b)



52



Следовательно, $2V=2S \cdot h$ или $V=S \cdot h$.

2 *случай.* Пусть S – площадь произвольной n-угольной прямой призмы и h – её высота. Основание призмы – n-угольник делится диагоналями на треугольники, каждый из которых можно разделить на прямоугольные треугольники (рис. 52). В результате данная призма разделится на конечное число прямых призм, основания которых являются прямоугольными треугольниками. Высоты этих призм равны h, а сумма площадей оснований этих призм равна площади основания данной призмы: $S = S_1 + S_2 + ... + S_k$.

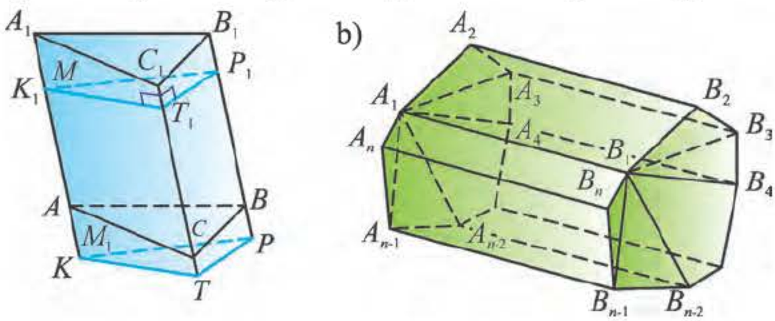
Объём данной призмы равен сумме объёмов составляющих её треугольных призм:

$$V = S_1h + S_2h + ... + S_kh = (S_1 + S_2 + ... + S_k)\, h = S \cdot h, \text{ или } V = S \cdot h. \square$$

Теорема. Объём произвольной призмы равен произведению площади его основания на высоту: $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

По рисунку 5.3 докажите эту теорему самостоятельно, сначала для треугольной призмы (рис. 5.3.a), затем для любой призмы (рис. 5.3.b).

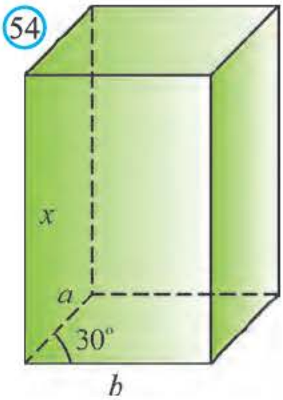
53 a) b)



Задача 1. Стороны основания прямого параллелепипеда равны a и b, а угол между ними $30°$. Найдите его объём, если площадь его боковой поверхности равна S.

Решение: Обозначим высоту параллелепипеда h (рис. 54). Тогда по условию задачи:

54



$$S = (2a+2b)\,h \text{ или } h = \frac{S}{2(a+b)}.$$

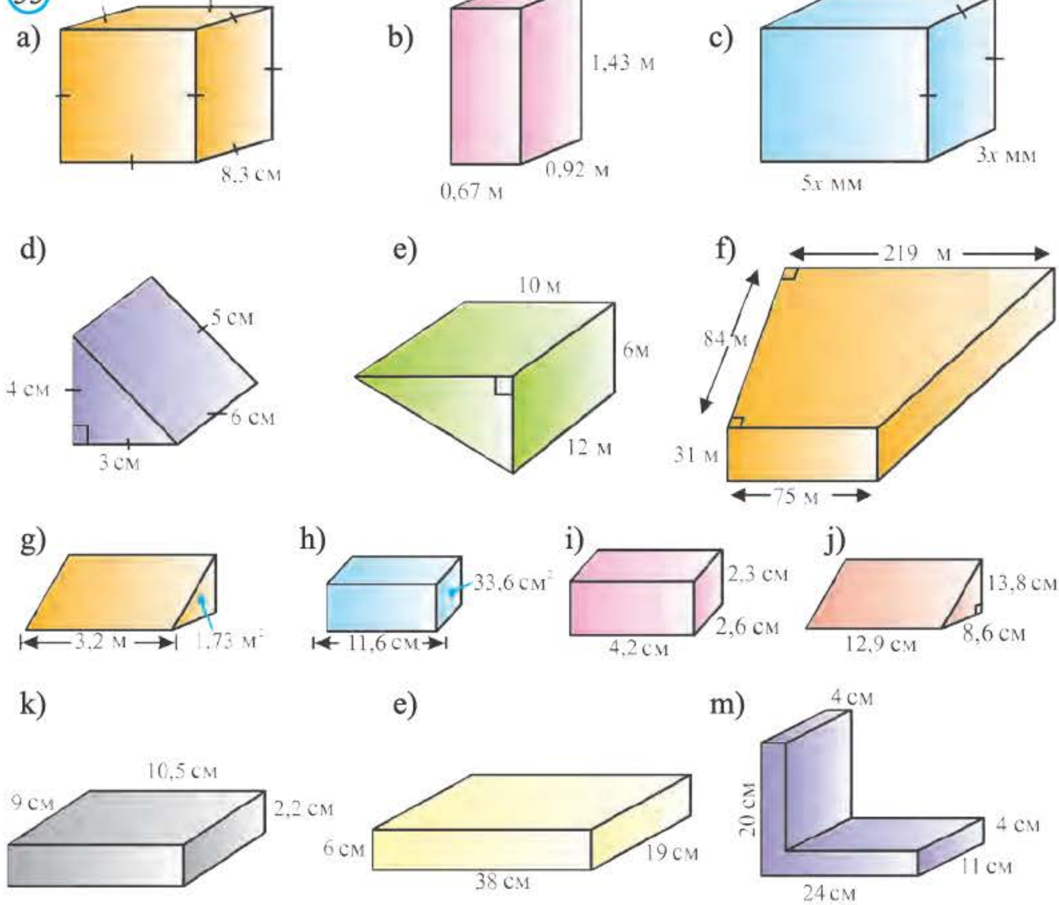
$$S_{\text{осн.}} = ab\sin 30^\circ = \frac{ab}{2}.$$

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{ab}{2}\cdot\frac{S}{2(a+b)} = \frac{abS}{4(a+b)}.$$

Задачи к теме и практические задания

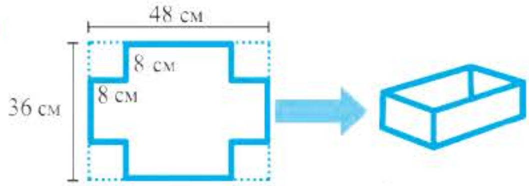
203. Найдите объёмы многогранников, изображённых на рисунке 55.

55

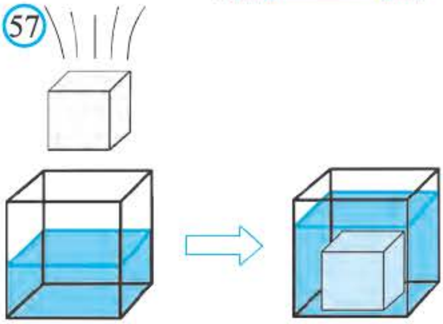


204. По данным развертки на рисунке 56 найдите объём получающегося из нее сосуда.

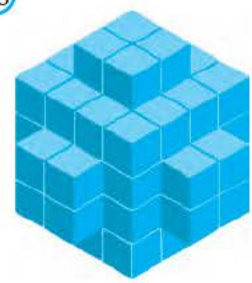
56



57



58



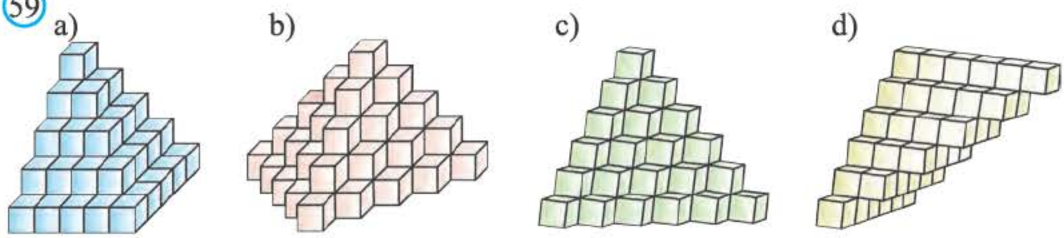
205*. Составьте задачу по рисунку 57 и решите её.

206. Тело изображённое на рисунке 58 составлено из 88 единичных кубиков. Найдите полную поверхность этого тела.

207. Площадь боковой грани прямоугольного параллелепипеда равна 12 и длина перпендикулярного ей рёбра равна 12. Найдите объём параллелепипеда.

208. Какая из пространственных фигур на рисунке 59 имеет больший объём, т. е. составлена из большего числа квадратиков?

59



209. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 24 и длина одного из рёбер равна 3. Найдите площадь перпендикулярной этому рёбру грани.

210. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 60 и площадь одной из её граней равна 12. Найдите длину перпендикулярного этой грани рёбра.

211. Длины трёх рёбер, исходящих из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, равны 4, 6, 9. Найдите ребро равновеликого ему куба.

212. Найдите диагональ куба, полная поверхность которого равна 18.

213. Найдите полную поверхность куба, объём которого равен 8.

214. При увеличении длины рёбра куба на 1 единицу, его объём увеличивается на 19 единиц. Найдите ребро куба.

215. Площадь полной поверхности куба равна 24. Найдите его объём.

216. Найдите объём куба, если его диагональ равна $\sqrt{12}$.

217. Найдите диагональ куба, если его объём равен $24\sqrt{3}$.

218. Объём одного куба в 8 раз больше объёма второго. Во сколько раз полная поверхность первого куба больше полной поверхности второго?

219. Сколько литров воды вмещается в сосуд (цистерну) кубической формы с ребром 30 см?

220. Длины рёбер, исходящих из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, равны 2 и 6, а его объём равен 48. Найдите длину третьего рёбра параллелепипеда, исходящего из этой вершины.

221. Длины сторон основания прямого параллелепипеда, равны $2\sqrt{2}$ см и 5 см, а угол между ними равен 45°. Найдите объём параллелепипеда, если его меньшая диагональ равна 7 см.

222*. Длины сторон основания прямого параллелепипеда, равны a и b, а угол между ними равен 30°. Найдите объём параллелепипеда, если его полная поверхность равна S.

223. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 15 м, 50 м и 36 м. Найдите ребро равновеликого ему куба.

224. Стороны основания прямой треугольной призмы 29, 25 и 6, а боковое ребро равно большей высоте основания. Найдите объём призмы.

225. Вычислите объёмы многогранников, изображённых на рисунке 39 из задачи 191 (все двугранные углы прямые).

226. Вычислите объёмы многогранников, изображённых на рисунке 40 из задачи 192 (все двугранные углы прямые).

227. Основание прямого параллелепипеда ромб, площадь которого равна 1 м^2. Площади его диагональнх сечений равны 3 м^2 и 6 м^2. Найдите объём параллелепипеда.

228. Вычислите объёмы многогранников, изображённых на рисунке 41 (все двугранные углы прямые).

229. Вычислите объёмы многогранников, изображённых на рисунке 42 (все двугранные углы прямые).

230. На площадку шириной 3 м и длиной 20 м уложили асфальт толщиной 10 см. Какой объём асфальта потратили на это?

231*. Основание наклонного параллелепипеда – квадрат со стороной 1 м. Одно из боковых рёбер равно 2 м и образует с каждой из прилежащих сторон основания угол 60°. Найдите объём параллелепипеда.

232*. Грани параллелепипеда – равные ромбы со стороной a и острым углом 60°. Найдите объём параллелепипеда.

233. Каждое ребро параллелепипеда равно 1 см. Три плоских угла у одной из вершин параллелепипеда острые и каждое равно $2a$. Найдите объём параллелепипеда.

234*. В параллелепипеде длины рёбер, исходящих из одной вершины , равны a, b, c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α (рис. 60). Найдите объём параллелепипеда.

235. Найдите объём: a) треугольной; b) четырёхугольной; c) шестиугольной правильной призмы по стороне основания a и боковому рёбру b.

236. В прямом параллелепипеде стороны основания равные a и b образуют угол α. Найдите объём параллелепипеда, если его меньшая диагональ равна d.

237. Боковые рёбра наклонной треугольной призмы равны 16 м, а расстояния между ними 26 м, 25 м и 17 м. Найдите объём призмы.

238. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Найдите объём призмы.

239. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, боковая поверхность равна сумме площадей его оснований. Найдите объём призмы.

240. Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна 4 $м^2$, расстояние между двумя противоположными гранями равно 2 м. Найдите объём призмы

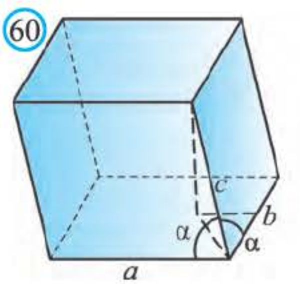
241*. После семикратной стирки, измерения мыла уменьшились в двое. (рис. 61). На сколько стирок ещё хватит мыла, если при каждой стирке тратится один тот же объём мыла?

242*. В наклонной призме проведена плоскость, перпендикулярная боковым рёбрам и пересекающая их. Найдите объём призмы, если её боковое ребро равно l, а площадь получившегося сечения равна Q (рис. 62).

243. Стороны основания прямой треугольной призмы равны 4 см, 5 см, 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Найдите объём призмы.

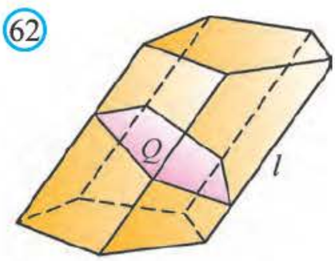
244. Вычислите объёмы многогранников, изображённых на рисунке 63.

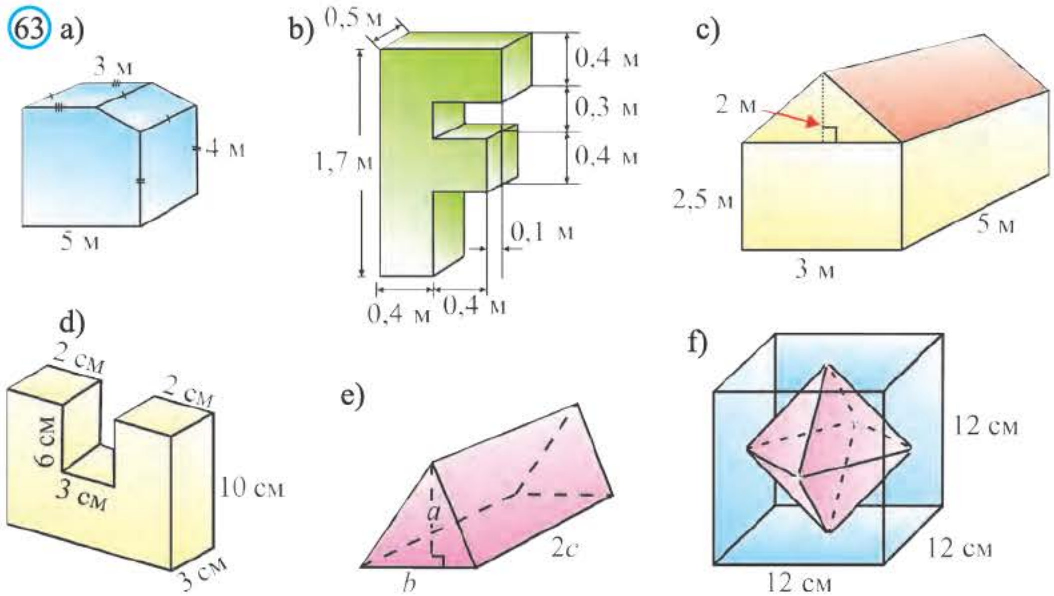
60



61

62





245. Площадь основания прямой треугольной призмы 4 см^2, а площади боковых граней 9 см^2, 10 см^2, 17 см^2. Найдите объём призмы.

246*. Основание призмы равнобедреный треугольник, одна сторона которого 2 см, а две другие по 3 см. Боковое ребро призмы равно 4 см и оно составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите объём равновеликого ему куба.

247. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, меньшая диагональ которой равна c. Найдите объём призмы.

248. Высота прямой четырёхугольной призмы равна h, диагонали наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найдите объём призмы, если угол между диагоналями её оснований равен γ.

249*. Вычислите пропускную способность (в кубических метрах за 1 час) водосточной трубы, сечение которой имеет вид равнобедренного треугольника с основанием 1,4 м и высотой 1,2 м. Скорость течения воды равна 2 м/с.

250*. Сечение железнодорожной насыпи имеет вид трапеции с нижним основанием 14 м, верхним 8 м и высотой 3,2 м. Найдите, сколько кубических метров земли требуется на 1 км насыпи?

251*. Деревянная плита в форме правильного восьмиугольника со стороной 3,2 см и толщиной 0,7 см имеет массу 17,3 г. Найдите плотность дерева.

252. Сколько коробок в форме прямоугольного параллелепипеда размером $30 \times 40 \times 50$ (см) можно поместить в кузов машины размером $2 \times 3 \times 1,5$ м?

253*. Сколько стальных плит можно погрузить на грузовик с грузоподъёмностью 3 т, если плита имеет форму прямоугольного параллелепипеда размером 420 мм × 240 мм × 90 мм и плотность стали равна 7,8 г/см^3?

254. Сколько кирпичей можно погрузить на грузовик с грузоподъёмностью 3 т, если кирпич имеет форму прямоугольного параллелепипеда размером 250 мм × 120 мм × 65 мм и его плотность равна 1,6 г/см^3?

255*. Сколько чугунных плит можно поднять на подъёмном кране грузоподъёмностью 2 т, если плита имеет форму прямоугольного параллелепипеда размером 820 мм × 210 мм × 120 мм и плотность чугуна равна 7,3 г/см^3?

256. Сколько брусков в форме прямоугольного параллелепипеда длиной 105 мм и размером поперечного сечения 30 см × 40 см можно нарезать из досок длиной 3 м, шириной 20 см и толщиной 20 мм?

257. Размер кирпича 25 × 12 × 6,5 (см). Определите массу одного кирпича, если масса 1 м^3 кирпичей равна 1700 кг.

258. По санитарным нормам каждому ученику в классе необходимо 7,5 м^3 воздуха. Найдите площадь классной комнаты, если её высота 3,5 м и класс рассчитан на 28 учеников.

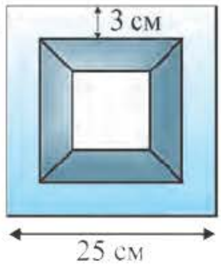
259*. На площадь прямоугольной формы длиной 100 м и шириной 10 м нужно уложить асфальт толщиной 5 см. Сколько машин асфальта грузоподъёмностью 5 т потребуется на это, если масса 1 м^3 асфальта равна 2,4 т?

260*. Кусок железа в форме прямоугольного параллелепипеда с измерениями 3 см, 4 см, 5 см нужно обработать на станке. Необходимо равномерно уменьшить каждое ребро бруска, а полную поверхность уменьшить на 42 см^2. Какую часть объёма всего бруска будет занимать объём изготовленной детали?

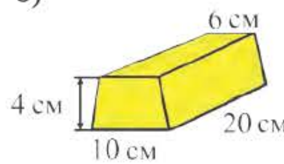
261*. На рисунке 64.a изображёно сечение чугунной трубы. Определите по данным на рисунке массу 1 м такой трубы (плотность чугуна – 7,3 г/см^3).

262. Определите плотность золота, если масса золотого слитка, измерения которого даны на рисунке 64.b равна 12,36 кг.

64 a)

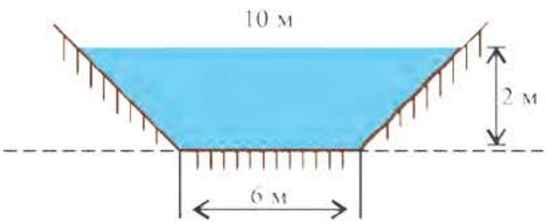


b)

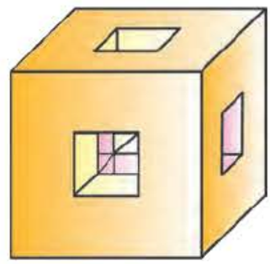


263*. Поперечное сечение канала – равнобедренная трапеция с основаниями 10 м и 6 м и высотой 2 м (рис. 65). Какой объём воды проходит по каналу за одну минуту, если скорость течения равна 1 м/с?

65



66

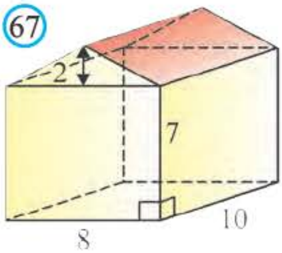


264*. Поперечные сечения каждой грани куба, сделанного из меди, с ребром 6 см образуют отверстия, основаниями которых являются квадраты со стороной 2 см (рис. 66). Найдите массу оставшейся части куба, если удельная плотность меди равна 0,9 г/см^3.

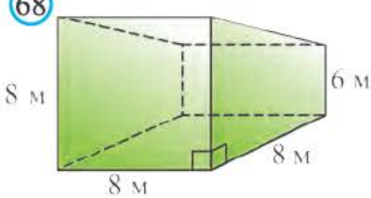
265. Стороны основания металлического блока в форме прямоугольного параллелепипеда 7 см и 5 см. Найдите высоту блока, если его масса равна 1285 г, а плотность металла 7,5 г/см^3.

266. Найдите объём гаража, пользуясь данными, приведёнными на рисунке 67.

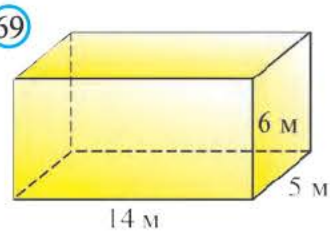
67



68



69



267. Глубина цветочныго горшка в форме прямоугольного параллелепипеда равна 2 фута, ширина 12 футов и длина 15 футов. Найдите его объём и выразите его в кубических метрах (1 фут = 30,48 см).

268. Склад изображённый на рисунке 68, имеет форму трапецивидной призмы. Найдите вместимость склада по данным на рисунке.

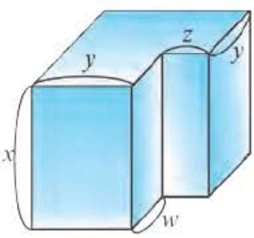
269*. На рисунке 69 приведёны измерения коробки. Её основание сделано из материала стоимостью 1000 сумов за 1 м^2, а боковые грани 2000 сумов за 1 м^2. Сколько заплатили за материал?

270. Найдите диагональ куба, если его объём равен V.

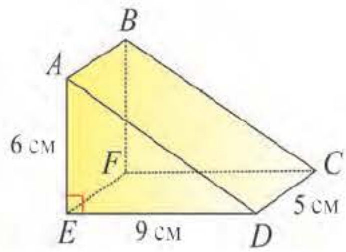
271. От большого прямоугольного параллелепипеда на рисунке 70 отрезан маленький прямоугольный параллелепипед. Найдите объём получившейся фигуры по данным, приведённым на рисунке.

272. Найдите объём призмы, изображённой на рисунке 71.

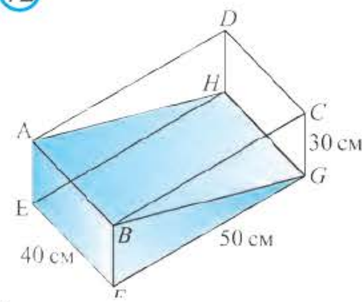
70



71



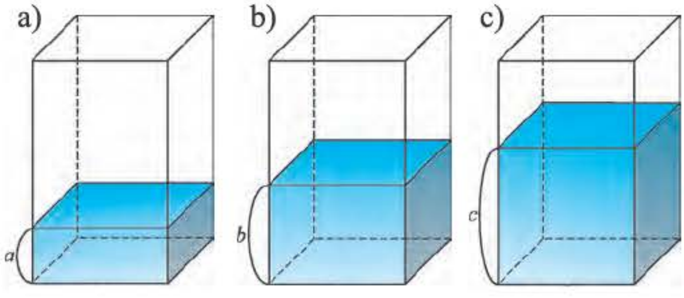
72



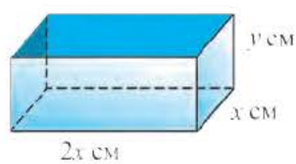
273*. Сколько воды содержится в аквариуме в форме прямоугольноного параллелепипеда, изображённого на рисунке 72?

274*. В одинаковые аквариумы в форме прямоугольного параллелепипеда налита вода, уровень которой представлен на рисуне 73. Каким будет отношение объёмов воды в аквариумах?

73



74



275*. Исследование. Предприятие выпускает коробки вместимостью 1 л в форме прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого относятся как 1:2 без крышки (рис. 74). Какими должны быть размеры коробки, чтобы их производство было экономнее, т.е. на их изготовление шло меньше всего материала? (Придавая x различные значения, найдите объём коробки и сравните эти значения или используйте методы дифференциального исчисления.)

276*. **Проблемный случай.** Геологи нашли камень и они хотят примерно определить объём. Они стоят возле речки, в их распоряжении есть металлический бак, в который можно вместить камень, несколько вёдер и одна бутылка объёмом 1 литр. Как геологи смогут определить объём камня?

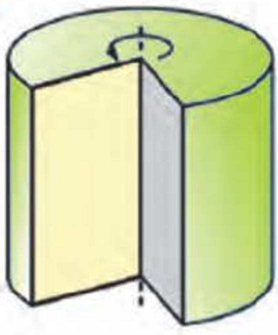
8. ПОВЕРХНОСТЬ И ОБЪЁМ ЦИЛИНДРА

8.1. Поверхность цилиндра

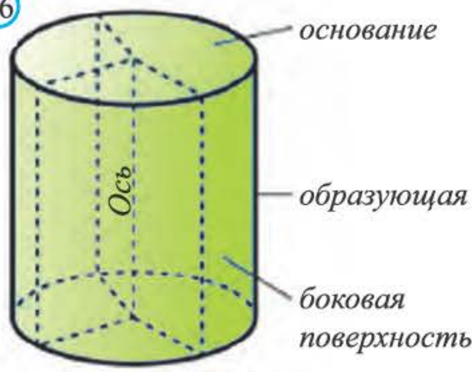
Ещё один важный класс пространственных фигур – тела вращения. Цилиндр является одним из них, мы познакомимся с ним глубже. Свойсва цилиндра похожи на свойства призм, мы последовательно изучим их.

Тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон называют *цилиндром* (точнее, прямой круговой цилиндр) (рис. 75). При вращении прямоугольника одна его сторона остаётся неподвижной. Её называют *осью цилиндра*. Поверхность, образованную при вращении противоположной стороны прямоугольника называют *цилиндрической поверхностью*, а саму сторону *образующей* цилиндра. Две другие стороны прямоугольника при этом вращении образуют два равных круга, которые называют *основаниями цилиндра* (рис. 76).

75



76

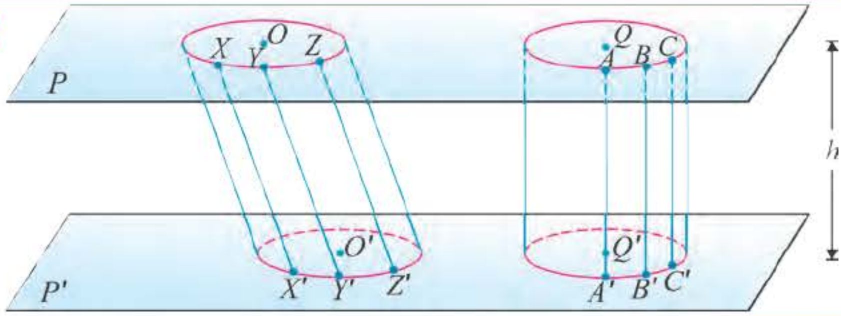


Замечание. Тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон называют *прямым круговым цилиндром*. Более широкое понятие цилиндра вводят следующим образом.

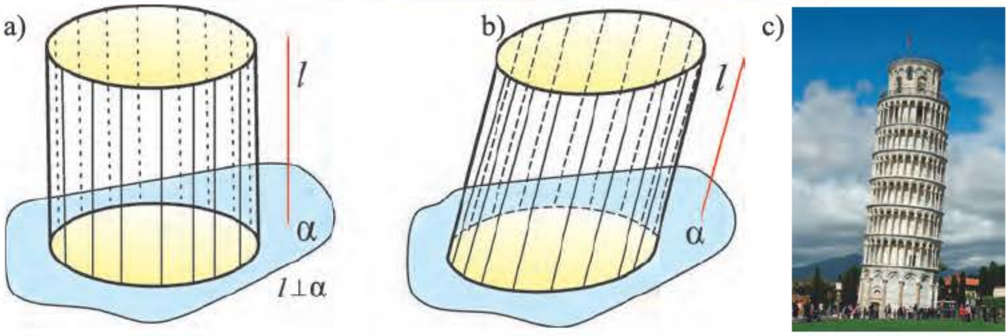
Пусть в пространстве параллельный перенос переводит плоскую фигура F_1 в фигуру F_2. Тело, состоящее из этих фигур и отрезков, соединяющих их соответствующие точки, называют *цилиндром* (рис. 77).

Если при параллельном переносе образующая перпендикулярна плоскости фигуры F_1, цилиндр называют *прямым* (рис. 78.a), в противном случае *наклонным цилиндром* (рис. 78.b). На рисунке 78.c изображёна Пизанская башня, имеющая вид наклонного цилиндра.

77



78 a) b) c)



Если фигура F_1 является кругом, то цилиндр называют *круговым цилиндром*.

Только прямой круговой цилиндр является телом вращения. В дальнейшем мы будем рассматривать прямые круговые цилиндры, которые для краткости будем называть цилиндрами.

Основания цилиндра являясь равными кругами, лежат на параллельных плоскостях. Перпендикуляр, опущенный из некоторой точки одного основания на другое, называют его *высотой*.

Расстояние между параллельными плоскостями равно высоте цилиндра. Ось цилиндра тоже является его высотой.

Образующие цилиндра параллельны и равны. Точно также, длины высоты, оси и образующих цилиндра будут равны между собой.

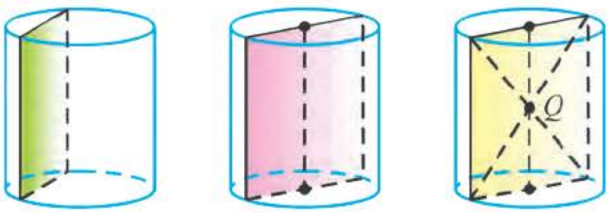
Сечением цилиндра плоскостью параллельной его оси является прямоугольник (рис.79.a). Две противоположные его стороны – это образующие цилиндра, а две другие стороны – соответствующие параллельные хорды оснований цилиндра.

В частности, *осевое сечение* также прямоугольник, образованный сечением цилиндра плоскостью, проходящей через его ось (рис. 79.b).

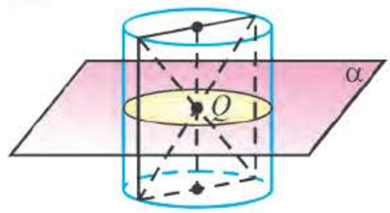
Диагонали осевого сечения цилиндра проходят через точку Q, являющуюся серединой отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра. Следовательно, эта точка Q есть центр симметрии цилиндра (рис. 79.c).

Плоскость, проходящая через точку Q перпендикулярно оси цилиндра является его плоскостью симметрии (рис. 80). Любая плоскость, проходящия через ось цилиндра также будет ось симметрии цилиндра (рис. 81).

79 a) b) c)



80



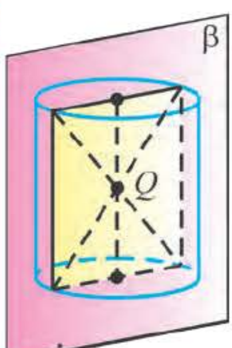
Задача 1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.

Решение. Сторона квадрата равна $\sqrt{Q}$. Она равна диаметру основания. Поэтому его площадь равна $S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$. □

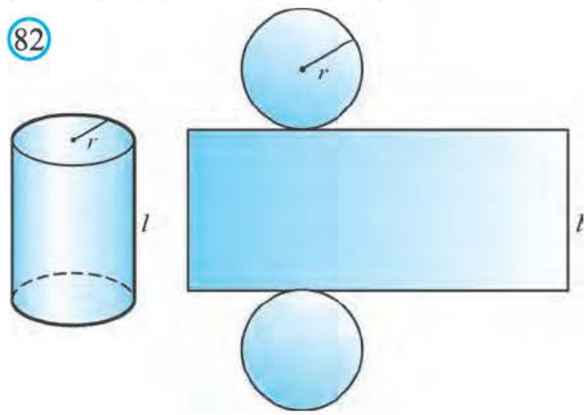
Теорема. Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания и его образующей: $S_{бок.} = 2\pi rl$.

Докажите самостоятельно эту теорему, пользуясь рисунком 82.

81



82



Следствие. Полная поверхность цилиндра равна сумме его боковой поверхности и площадей двух его оснований:

$$\boldsymbol{S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{S_{полн.} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(l + r).}$$

Пусть дан произвольный цилиндр. Впишем в одно из его оснований многоугольник $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ (рис. 83). Через вершины многогранника $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ и A_n проведём образующие цилиндра A_1B_1, A_2B_2, ..., $A_{n-1}B_{n-1}$ и A_nB_n, другие концы которых $B_1, B_2, ..., B_{n-1}$ и B_n последовательно соединим отрезками. В результате получим призму $A_1A_2...A_{n-1}A_n B_1B_2... B_{n-1}B_n$. Эту призму называют *призмой, вписанной в цилиндр*. А цилиндр называют *цилиндром, вписанным в призму*. Если призма вписана в цилиндр, то основание призмы будет вписано в основание цилиндра и боковые рёбра призмы будут лежать на боковой поверхности цилиндра.

Ясно, что если вокруг основания призмы можно описать окружность, то вокруг призмы можно описать цилиндр.

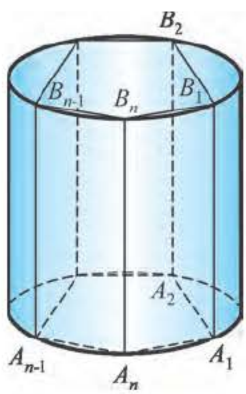
Аналогично вводятся понятия *призмы, описанной вокруг цилиндра* и *цилиндра, вписанного в призму* (рис. 84). Если призма описана вокруг цилиндра, то основание призмы будет описано вокруг основания цилиндра и боковые грани призмы будут касаются боковой поверхности цилиндра.

Ясно, что если в основание призмы можно вписать окружность, то вокруг цилиндра можно описать призму.

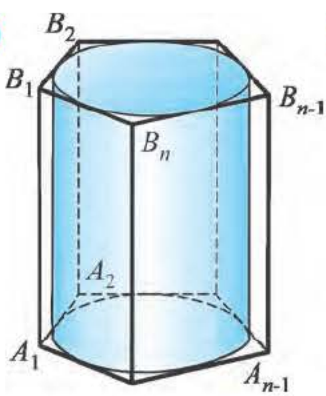
8.2. Объём цилиндра

Теорема. *Объём* цилиндра равен произведению площади его основания и образующей цилиндра: $\boldsymbol{V = S_{осн.} \cdot l}$.

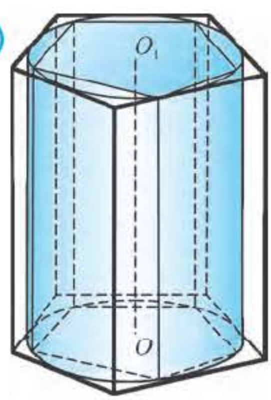
83



84



85



Доказательство. Пусть дан цилиндр с осью OO_1 (рис. 85). Впишем в него призму $A_1 A_2 ... A_{n-1} A_n$ $B_1 B_2 ... B_{n-1} B_n$ и опишем вокруг него призму $C_1 C_2 \ldots C_{n-1} C_n D_1 D_2 \ldots D_{n-1} D_n$. Обозначим объём цилиндра V, а объёмы вписённой и описанной призм V_1 и V_2, тогда имеет место двойное неравенство $V_1 < V < V_2$. Объёмы призм находят по следующим формулам:

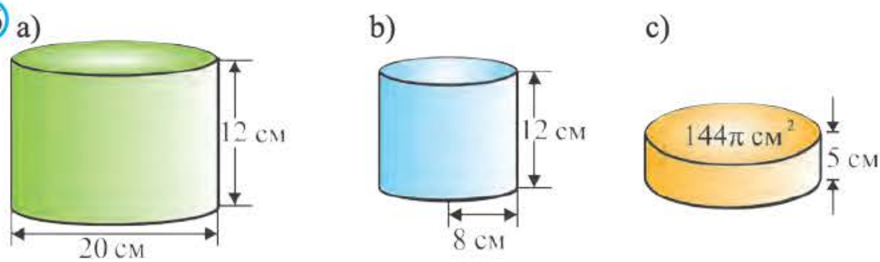
$$V_1 = S_{A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n} \cdot l \qquad \text{и} \qquad V_2 = S_{C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n} \cdot l$$

Будем всё больше и больше увеличивать число n сторон оснований призм. Тогда объём вписанной призмы будет увеличиваться, а объём описанной призмы уменьшаться. Если число n сторон увеличивать неограниченно, то разность между объёмами будет стремится к нулю. Число, к которому приближаются объёмы вписанной и описанной призм, принимают за объём данной призмы. При этом площади многогранников $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ и $C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n$ будут стремиться к площади S круга, лежащего в основании цилиндра. Следовательно, $V = S_{\text{осн.}} \cdot l$. □

Задачи к теме и практические задания

277. Найдите боковую и полную поверхности цилиндра по рисунку 86.

86



278. Радиус основания цилиндра 6 см, высота 4 см. Вычислите площадь диагонального сечения цилиндра.

279. Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.

280. Площадь основания цилиндра 64 π см², его высота 8 см. Вычислите площадь диагонального сечения цилиндра.

281. Площадь осевого сечения цилиндра – квадрат, площадь которого равна Q. Найдите площаль основания цилиндра.

282. Осевым сечением цилиндра является квадрат, площадь которого равна 36 см². Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра.

283. Найдите боковую поверхность цилиндра, если площадь его основания равна 4.

284. Высота цилиндра 6, радиус основания 5. Найдите площадь сечения, проведённого параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 от нее.

285. Радиус основания цилиндра равен 2, а высота 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

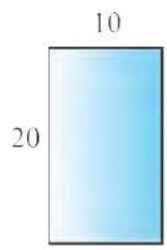
286. Длина окружности основания цилиндра равна 3π, а высота 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

287. Площадь развёртки цилиндра 24π дм^2, а высота 4 дм. Найдите радиус его основания.

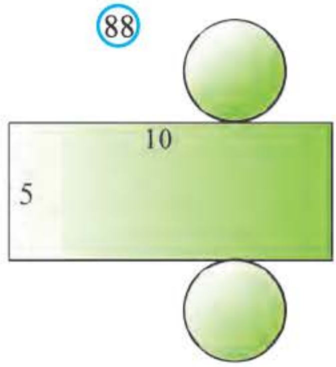
288. Радиус основания цилиндра 5 см, высота 6 см. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра.

289. Высота цилиндра 8 дм, радиус его основания 5 дм. Цилиндр пересечён плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси цилиндра.

87



88



290*. Найдите площади боковой и полной поверхности цилиндра по его осевому сечению на рисунке 87.

291*. Найдите площади боковой и полной поверхности цилиндра по его развёртке на рисунке 88.

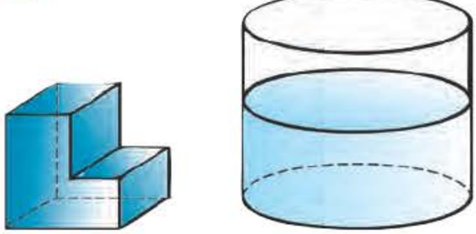
292. Радиус основания цилиндра 3 см, а высота на 2 см длинее радиуса его оснвания. Вычислите объём цилиндра.

294*. Когда в сосуд цилиндрической формы налили 2000 см^3 воды, уровень воды стал равен 12 см. Когда в сосуд погрузили деталь, то он поднялся ещё на 9 см. Найдите объём детали и выразите его в см^3.

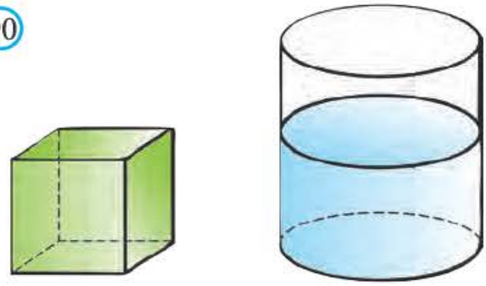
295. Когда в сосуд цилиндрической формы налили 3 л воды, её уровень стал равен 15 см (рис. 89). Когда в сосуд погрузили деталь, он поднялся ещё на 4 см. Найдите объём детали и выразите его в см^3.

296*. Когда в сосуд цилиндрической формы налили 4 л воды, её уровень стал равен 20 см (рис. 90). Когда в сосуд погрузили деталь, то он поднялся ещё на 5 см. Найдите объём детали и выразите его в см^3.

89



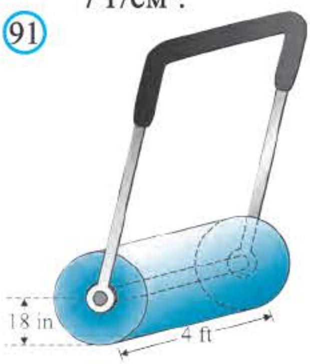
90



297*. На рисунке 91 изображён каток цилиндрической формы. Используя данные на рисунке, найдите площадь которую он разравнивает за один оборот. (Примечание: 1 ft = 12 дюмов (in) = 30,48 см).

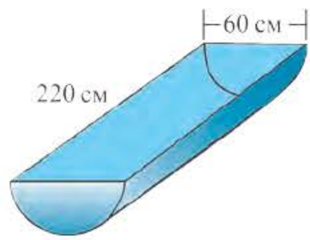
298*. Внутренний диаметр резинового шланга для полива равен (рис. 92) 3 см, внешний 3,5 см, а длина 20 м. Сколько литров воды он вмещает? Найдите массу этого шланга, если плотность резины 7 г/см^3.

91



92

93



299*. На рисунке 93 изображён сосуд в форме полуцилиндра. Сколько краски нужно на окрашивание внутренней и внешней поверхностей сосуда, если на окрашивание площади в 1 см^2 нужно 6 г краски? Сколько литров воды вмещает этот сосуд?

94

95

96

300*. Диаметр основания одного из сосудов в форме цилиндра в 2 раза больше диаметра основания второго, но он в 3 раза ниже его (рис. 94). Который из них имеет больший объём?

301*. Для апельсинового сока имеются два вида банок с радиусом основания 5 см и высотой 20 см, один вид сделан из металла, а другой из картона (рис. 95). Найдите цену одной банки, если цена 1 см^2 металла 5 сумов, а картона 2 сума. Сколько сока вмещает 1 банка?

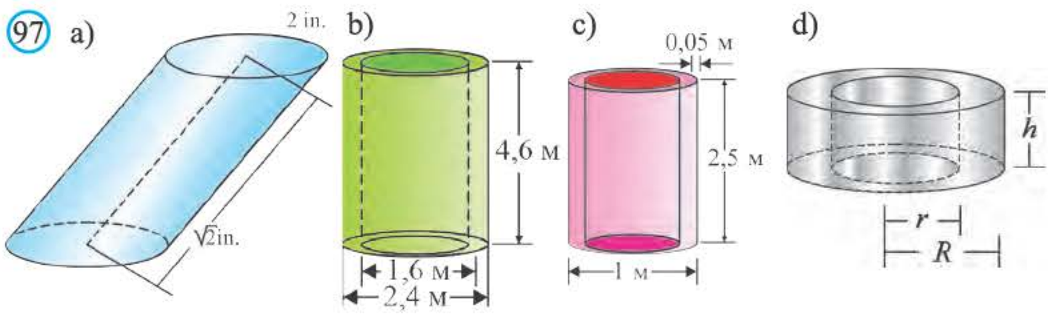
302*. Имеется консервная банка в форме цилиндра с радиусом основания 1,5 дюйма и высотой 4,25 дюйма (рис. 96). Найдите полную поверхность и объём банки. Найдите цену одной банки, если цена 1 см^2 металла 5 сумов. (Примечание: 1 дюйм = 2,54 см.)

303*. Высота цистерны для хранения нефти равна 16 футов, а радиус основания 10 футов. Найдите вместимость цистерны, если 1 кубический фут равен 7,5 галлонов. (Напоминание: 1 амер. галлон = 3,785 л, 1 амер.баррель = 42 амер. галлона = 159 л.)

304*. Бак фермера имеет форму цилиндра, высота которого 6 футов, а радиус основания 1,5 фута. Найдите вместимость бака в голлонах.

305. Найдите объёмы пространственных фигур на рисунке 97.

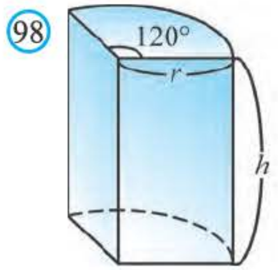
97



306*. В цилиндрический сосуд налили 6 см^3 воды. Когда в воду полностью погрузили деталь, то уровень воды увеличился в 1,5 раза. Найдите объём детали и выразите его в см^3.

307*. Уровень воды в сосуде цилиндрической формы 16 см. В сосуд погружен другой сосуд цилиндрической формы, диаметр которого в 2 раза меньше. Каким станет уровень воды в большем сосуде?

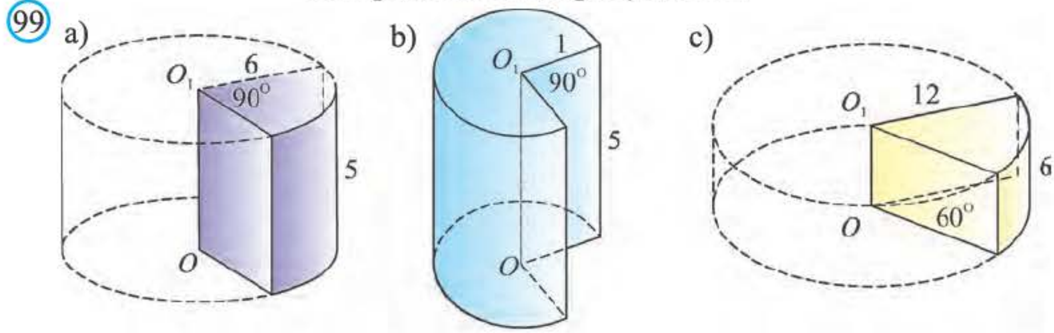
308. Объём одного цилиндра 12 м^3. Найдите объём второго цилиндра, если его высота в 3 раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше.



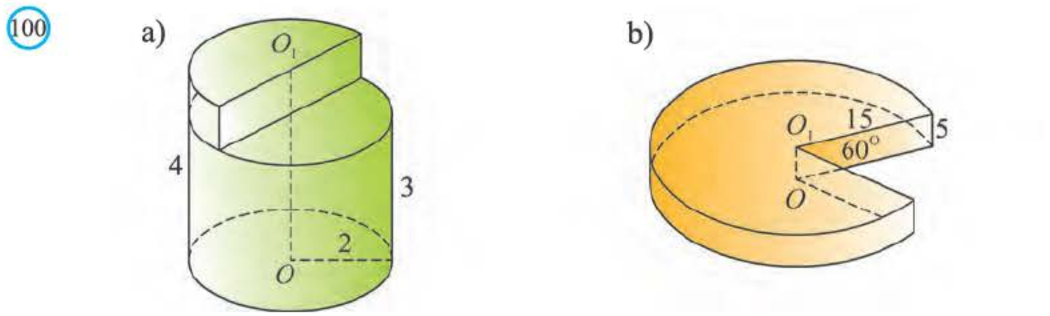
309*. Сосуд цилиндрической формы в 2 раза выше другого, но его диаметр в 1,5 раза больше. Вычислите объёмы этих сосудов.

310. Найдите объем пространственной фигуры, изображенный на рисунке 98.

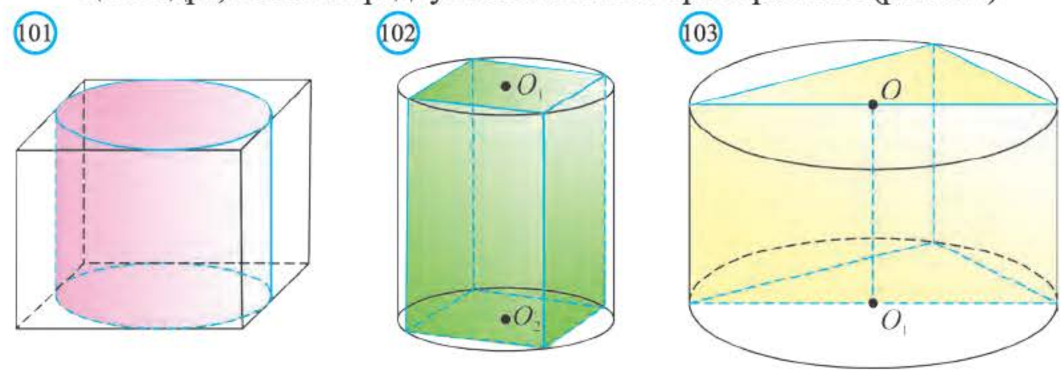
311. Найдите объёмы пространственных фигур, изображенный на рисунке 99.



312. Найдите объёмы пространственных фигур, изображенный на рисунке 100.



313. Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, описанного вокруг цилиндра, высота и радиус основания которого равны 1 (рис.101).



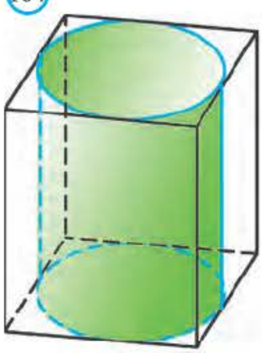
314. Вокруг цилиндра с радиусом основания 4 описан прямоугольный параллелепипед (рис. 102). Найдите высоту цилиндра, если объём параллелепипеда равен 16.

315. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро призмы равно 5 (рис. 103). Найдите объём описанного вокруг неё цилиндра.

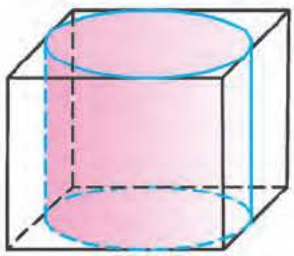
316. Основание прямой призмы – квадрат, сторона которого равна 2. Найдите объём цилиндра, описанного вокруг этой призмы.

317. Радиус основания цилиндра равен 2, вокруг него описана прямая четырехугольная призма (рис. 104). Найдите высоту цилиндра, если боковая поверхность призмы равна 16.

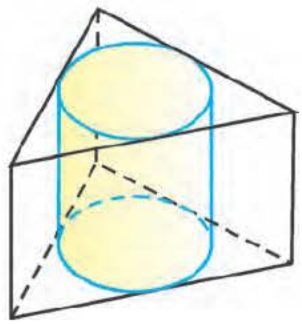
104



105



106

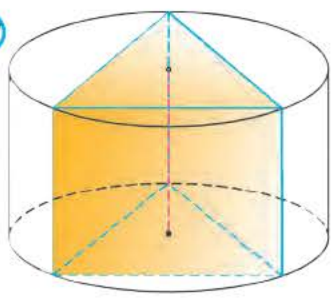


318. Вокруг цилиндра, высота и радиус основания которого равны 1, описана правильная четырёхугольная призма (рис. 105). Найдите боковую поверхность призмы.

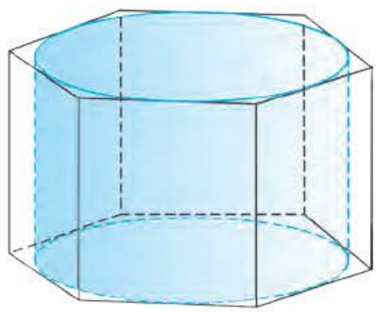
319. Вокруг цилиндра с радиусом основания $\sqrt{3}$ и высотой 2 описана правильная треугольная призма (рис. 106). Найдите боковую поверхность призмы.

320. В цилиндр радиуса $2\sqrt{3}$ и высотой 2 вписана правильная треугольная призма (рис. 107). Найдите боковую поверхность призмы.

107



108



321. Вокруг цилиндра с радиусом основания $\sqrt{3}$ и высотой 2 описана правильная шестиугольная призма (рис. 108). Найдите боковую поверхность призмы.

322*. Найдите объём детали, изображённой на рисунке 109.

323*. Сколько краски потребуется на окрашивание трубы длиной 10 м, диаметром основания 1 м, если толщина покрытия 1 мм?

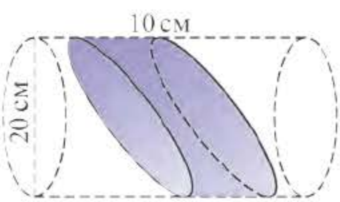
324*. Найдите: a) площадь боковой поверхности; b) объём локтевой трубы, изображённой на рисунке 110 (примите $\pi \approx 3$).

325*. Длина чугунной трубы 2 м, внешний диаметр 20 см. Найдите массу трубы, если её толщина 2 см и плотность чугуна 7,5 г/см^3.

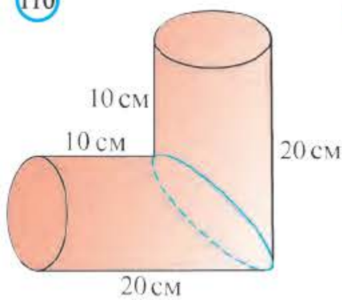
326*. Покажите, используя рисунок 111, что для наклонного цилиндра имеет место равенство $S \cdot h = Q \cdot l$.

327*. Найдите кратчайшей путь от точки A до точки B на цилиндре, изображённом на рисунке 112. (Указание: используйте развёртку цилиндра.)

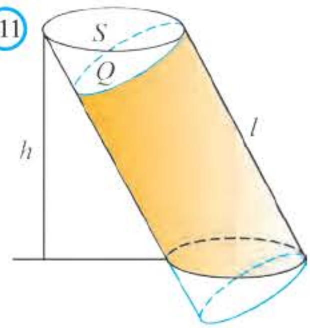
109



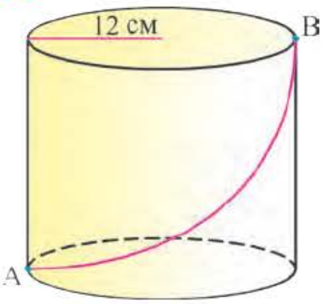
110



111



112



Исторические сведения

Абу Али ибн Сино

В произведении Абу Райхна Беруни «Книга о началах искусства астрономии» («Астрономия») как введение в стереометрию в разделе о геометрии приводятся следующие определения фигур:

Куб – физическая фигура, похожая на кубик для игры в нарды, ограниченная с шести сторон квадратами.

Призма – представляет собой фигуру, ограниченную по бокам плоскостями в форме квадрата или прямоугольника, а сверху и снизу – двумя треугольниками. В этом определении Беруни приведёно описание частного вида призмы, а именно треугольной призмы.

Гияс ад-Дин аль-Каши

Книга Беруни «Канон Масъуда» написана в 1037 году. В ней приведёны правила нахождения объёмов параллелепипеда и призмы: «Если тело не четырёхугольное или другого вида, то его расчёт таков: найди площадь, умножь его на глубину, в итоге получишь объём».

В произведении Абу Али ибн Сино «Книга знания» в разделе «Основы изучения геометрических тел» дано описание тела и треугольной призмы. А также описаны условия взаимного равенства двух призм. Ибн Сино даёт следующее определение призмы: «Призма – тело, ограниченное двумя плоскими треугольными сторонами.»

В произведении Аль Каши «Книга счёта» приведёно много примеров расчета площадей поверхностей и объёмов тел. Благодаря своим глубоким знаниям в математике, геометрии, тригонометрии, механике и астрономии он пользовался вниманием и уважением Улугбека. Аль Каши наряду с многоугольниками изучал призмы, пирамиды, цилиндры, конусы, усечённые конусы.

9. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ ГЛАВЫ

9.1. 2 проверочный тест

1. Сколько плоскостей симметрии имеет куб?
A) 8; B) 9; C) 7; D) 10.

2. Найдите объём куба, если площадь его диагонального сечения равна $2\sqrt{2}$.
A) $2\sqrt{2}$; B) $\sqrt{7}$; C) $4\sqrt{2}$; D) $5\sqrt{2}$.

3. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда 7 см и 24 см. Высота параллелепипеда 8 см. Найдите площадь его диагонального сечения.
A) 168; B) 1344; C) 100; D) 200.

4. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 4 и она составляет с боковой гранью угол 30°. Найдите боковую поверхность призмы.
A) $16\sqrt{2}$; B) 16; C) 18; D)$18\sqrt{2}$.

5. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна $\sqrt{2}$, а угол между диагональю и боковой гранью угол равен 30°. Найдите объём призмы.
A) $8\sqrt{2}$; B) 4; C) 16; D) $4\sqrt{2}$.

6. Сколько граней имеет призма, если число всех её рёбер равно 36?
A) 12; B) 16; C) 9; D) 10.

7. Ребро наклонной призмы равно 20 и оно составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите высоту призмы.
A) 12; B) $10\sqrt{3}$; C) 10; D) $10\sqrt{2}$.

8. Стороны основания прямой четырёхугольной призмы равны 15, 20 и 25 и боковое ребро равно высоте основания. Найдите объём призмы.
A) 600; B) 750; C) 1800; D) 1200.

9. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 8 и она составляет с боковым ребром угол 30°. Найдите объём призмы.
A) 72; B) 64; C) 76; D) 80.

10. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь его диагонального сечения равна 10.
A) 10π; B) 20π; C) 30π; D) 15π.

11. Высота цилиндра равна 8, а диагональ развёртки боковой поверхности 10. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
A) 48; B) 48π; C) 24; D) 24π.

12. Прямоугольник со сторонами 2 и 4 вращается вокруг большей стороны. Найдите полную поверхность получившегося тела.
A) 22π; B) 23π; C) 24π; D) 20π.

13. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 72π и диагональ прямоугольника в его развёртке составляет с основанием угол 45°. Найдите радиус основания цилиндра.

A) 5; B) 4; C) 6; D) 8.

14. Во сколько раз увеличится объём цилиндра, если увеличить его радиус основания в два раза?

A) 4; B) 2; C) 3; D) 6.

15. Объём цилиндра равен 120π, боковая поверхность 60π. Найдите радиус основания цилиндра.

A) 4; B) 5; C) 6; D) 4; 2.

16. Высота цилиндра равна 5, а сторона правильного треугольника, вписанного в его основание $3\sqrt{3}$. Найдите объём цилиндра.

A) 25π; B) 35π; C) 45π; D) 40π.

17. Диагональным сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна 12. Найдите объём цилиндра.

A) $108\sqrt{2}\pi$; B) $54\sqrt{2}\pi$; C) $36\sqrt{2}\pi$; D) $216\sqrt{2}\pi$.

18. Полная поверхность цилиндра равна 24π, а боковая поверхность 6π. Найдите объём этого цилиндра.

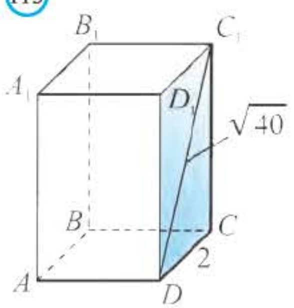
A) 7π; B) 11π; C) 8π; D) 9π.

9.2. Задачи

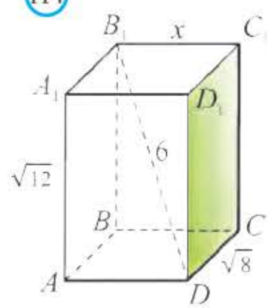
328. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 113). $DC_1=\sqrt{40}$, $DC=2$, $P_{ABCD}=10$. Найдите диагональ параллелепипеда.

329. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. Найдите длину рёбра B_1C_1 по данным на рисунке 114.

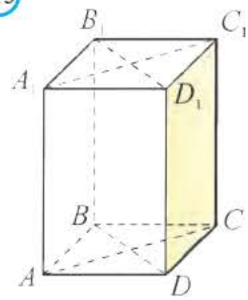
113



114



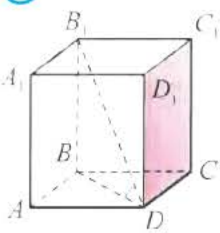
115



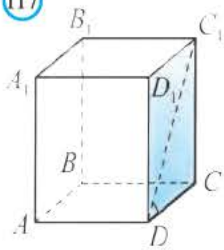
330. Основание прямой призмы ромб $ABCD$ (рис. 115). Площади диагональных сечений призмы равны 60 и 80, а высота 10. Найдите боковую поверхность призмы.

331. Основание прямой призмы ромб $ABCD$. Площади диагональных сечений призмы равны 24 и 32, а высота 4. Найдите боковую поверхность призмы.

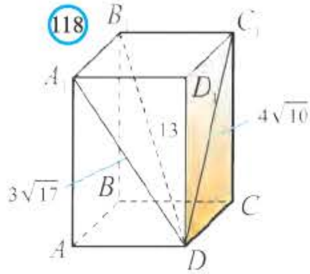
116



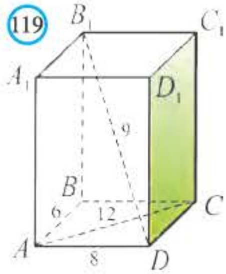
117



118



119



332. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма (рис. 116). $\angle B_1DB = 45°$, $S_{\text{полн.}} = 32(2\sqrt{2}+1)$. Найдите AD.

333. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма (рис. 117). $\angle C_1DC = 60°$, $S_{\text{полн.}} = 128(2\sqrt{3}+1)$. Найдите AD.

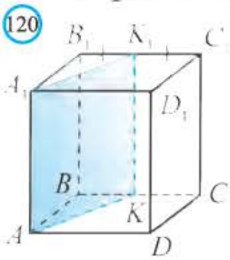
334. Найдите боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 118), если $DB_1 = 13$, $DA_1 = 3\sqrt{17}$, $DC_1 = 4$.

335. Найдите боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 119), если $AB = 6$, $AD = 8$, $DB_1 = 9$.

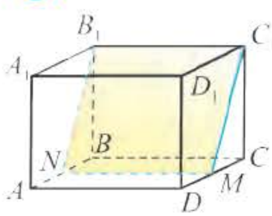
336. Точка K середина рёбра BC (рис. 120). Найдите отношение объёма призмы $ABKA_1B_1K_1$ к объёму параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

337. Точки N и M середины диагоналей параллеленипеда (рис. 121). Найдите отношение объёма призмы $AA_1B_1NDD_1C_1M$ к объёму параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

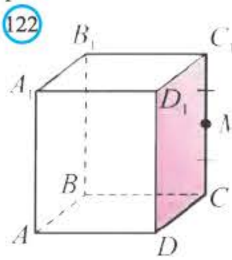
120



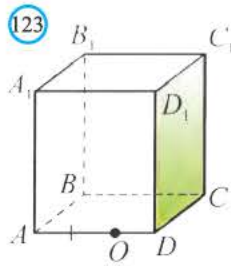
121



122



123



338. Боковая поверхность правильной четырёхугольной призмы равна 72 см², а площадь основания 64 см². Найдите объём призмы.

339. Периметр основания правильной четырёхугольной призмы 12 см, периметр боковой грани 18 см. Найдите объём призмы.

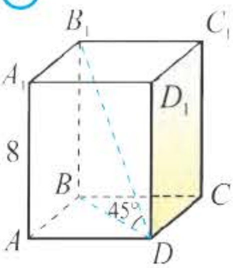
340. Дан куб (рис. 122). $CM = MC_1$ и плоскость ADM делит куб на две части. Найдите отношение объёма большей части куба к объёму его меньшей части.

341*. Дан куб (рис. 123). $AO : OD = 2 : 1$ и плоскость BB_1O делит куб на две части. Найдите объём куба, если объём его меньшей части равен 6.

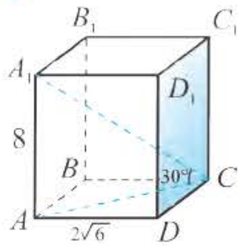
342*. Высота правильной четырёхугольной призмы равна 8, угол наклона диагонали к плоскости основания равен 45° (рис. 124). Найдите объём призмы.

343*. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна $2\sqrt{6}$, диагональ составляет с плоскостью основания угол 30° (рис. 125). Найдите объём призмы.

124



125



126

127

344. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если площадь его боковой поверхности 91π (рис. 126).

345. Осевые сечения цилиндра – квадрат площадью 173 (рис. 127). Найдите площадь его боковой поверхности.

346. Высота цилиндра равна 24, диагональ осевого сечения 26. Найдите объём цилиндра.

347. Площадь осевого сечения цилиндра равна 10, а длина окружности основания 8. Найдите объём цилиндра.

348. Радиус цилиндра равен 3, площадь его боковой поверхности 200. Найдите объём цилиндра.

9.3. Образец 2 контрольной работы

1. Точка A двугранного угла находится на расстоянии 10 см от его рёбра, а 5 см от грани. Найдите градусную меру двугранного угла.

2. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы, если все её грани равны 2.

3. Цистерна цилиндрической формы, диаметр основания которой 18 м и высота 7 м, наполнена нефтью. Найдите массу нефти в тоннах, если её плотность равна 0,85 г/см^3?

4. Найдите объём цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму если все её грани равны 4 см.

5. (*Дополнительная задача для хорошо успевающих учащихся*). Найдите полную поверхность и объём детали, размеры которых представлены на рисунке 128.

128

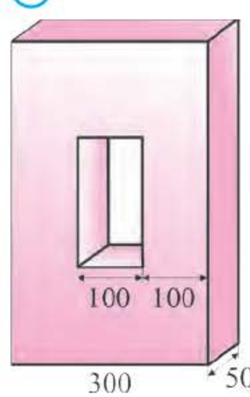


Таблица приближенных значений тригонометрических функций

A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$	A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$	A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$
0°	0	0	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

Ответы

Ответы к главе 1

3. $A(5;\ 7;\ 10)$, $B(4;\ -3;\ 6)$, $C(5;\ 0;\ 0)$, $D(4;\ 0;\ 4)$, $E(0;\ 5;\ 0)$, $F(0;\ 0;\ -2)$. **6.** $(3;\ 2;\ 0)$, $(3;\ 0;\ 4)$, $(0;\ 2;\ 4)$. **8.** $\sqrt{26}$. **9.** a) 3, 3, 3; b) $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$; c) $3\sqrt{2}$. **10.** 2, 3, 1. **11.** $(3;\ 3;\ 3)$, $(-3;\ 3;\ 3)$, $(3;\ -3;\ 3)$, $(3;\ 3;\ -3)$, $(-3;\ -3;\ 3)$, $(-3;\ 3;\ -3)$, $(3;\ -3;\ -3)$, $(-3;\ -3;\ -3)$. **12.** $O(0;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ 0;\ 0)$, $A(2;\ 2;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$, $O_1(0;\ 0;\ -2)$, $B_1(2;\ 0;\ -2)$, $A_1(2;\ 2;\ -2)$, $C_1(0;\ 2;\ -2)$. **13.** D nuqta. **14.** $3\sqrt{6}$. **15.** Yo‘q. **17.** c) teng бокli, $P=6\,(1+\sqrt{3})$, $S=9\sqrt{2}$. **18.** $(-0{,}25;\ 0{,}25;\ 0)$. **19.** $D_1(1;\ -1;\ 1)$, $A_1(1;\ 1;\ -1)$, $B_1(-1;\ 1;\ -1)$, $D_1(1;\ -1;\ -1)$. **21.** $x^2+y^2+z^2=25$, $x^2+y^2+z^2\le 25$. **22.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$; $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2\le 9$. **23.** $(x+2)^2+(y-1)^2+$ $+(z-3)^2=9$; $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. **25.** 1)$(0;\ 1;\ 0)$; 2) $(1;\ 1;\ 1)$; 3) $(0;\ 0;\ 2)$, 4) $(-0{,}7;\ 0{,}1;\ 0{,}6)$; 5) $(2\sqrt{3};\ 1{,}5;\ 1)$. **28.** $A(5;-4;0)$, $B(-7;5;6)$, **31.** $K\left(0;-5;\dfrac{17}{2}\right)$. **32.** a) $D(-1;\ -3;-9)$.

33. a) $M(-1;\ 2;\ 0)$; c) $M(3;\frac{3}{4};\ 0)$. **35.** $L(\frac{25}{8};\frac{33}{8};\frac{9}{4})$. **36.** $\frac{4\sqrt{2}}{5}$. **37.** a) $\sqrt{2}$; b) 30°; 30°; 120°; c) $2\sqrt{3}$. **38.** $MK=\frac{\sqrt{73}}{3}$. **39.** $A(5;\ 4;\ 10)$, $B(4;\ -3;\ 6)$, $C(5;\ 0;\ 0)$, $D(4;\ 0;\ 4)$. **40.** $\overline{OA}=(1;\ 1;\ 1)$, $\overline{OB}=(-1;\ 0;\ 1)$, $\overline{OC}=(0;\ 1;\ 1)$, $\overline{BO}=(1;\ 0;\ -1)$, $\overline{CO}=(0;\ -1;\ -1)$, $\overline{AB}=(-2;\ -1;\ 0)$.
42. a) $\overline{AB}=(2;\ 5;\ 3)$, b) $\overline{AB}=(4;\ -6;\ 2)$. **43.** $|\overline{a}|=\sqrt{3}$; $|\overline{b}|=2\sqrt{5}$, $|\overline{c}|=\sqrt{14}$, $|\overline{d}|=\sqrt{30}$. **44.** ± 3.
45. a) $\overline{a}(3;\ 6;\ -3)$, b) $\overline{a}(-3;\ -6;\ 3)$. **47.** a) 1 или –1; b) 3 или –1; c) 2 или –4; d) 3 или 5/3.
48. $D(-2;\ 0;\ 1)$. **50.** $n=\frac{4}{3}$; $м=\frac{3}{2}$. **52.** a) $D(3;\ 0;\ 0)$. **56.** $\overline{c}(-3;\ -4;\ 8)$, $|\overline{c}|=\sqrt{89}$; 2) $\overline{c}(4;\ 5;\ 5)$, $|\overline{c}|=\sqrt{66}$. **57.** $\overline{c}(-3;\ 4;\ 0)$, $|\overline{c}|=5$; 2) $\overline{c}(0;\ 2;\ 6)$, $|\overline{c}|=2\sqrt{10}$. **59.** $\overline{a}=\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{j}-4\overline{k}$, $\overline{c}=2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{d}=\overline{i}+2\overline{j}+5\overline{k}$. **60.** $\sqrt{59}$, $\sqrt{219}$, $\sqrt{122}$, $\sqrt{918}$. **63.** $AC = AO + OC = 4i + 2k$, $AC(-4;\ 0;\ 2)$; $CB = CO + OB = 2k + 9j$, $CB\ (0;\ 9;\ 2)$; $AB = AO + OB = -4i + 9j$, $AB(-4;\ 7;\ 0)$. **65.** $\approx 180N$. **66.** a) 60°; b) 30°; c) 90°; d) 60°; e) 45°. **67.** a) –6; b) 3; c) –6; d) 3.
68. a) 40°; b) 140°; c) 150°. **69.** a) 30; b) 3; c) 15; d) –28. **70.** a) 1/3; b) –1; c) 2; d) 4.
71. a) 16. **75.** a) 1; b) 0. **76.** $\overline{BF}=2(\overline{DO}-\overline{DC})$. **77.** $\frac{1}{3}(2\overline{AC}-\overline{AB})$. **78.** $\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{AC})-\overline{AD}$.

83. a) $(1;\ -1;\ 7)$; b) $(-2;\ 3;\ 1)$; c) $(0;\ -4;\ 4)$. **84.** $\overline{p}(-1;\ 5;\ 3)$. **86.** $B(-8;\ 4;\ 1)$. **88.** $(2;\ -5;\ 9)$; $(-2;\ -2;\ 7)$; $(6;\ -12;\ 2)$. **93.** Относительно плоскости Oxz. **100.** $(0;\ -3;\ 1)$. **106.** a) 36 см; b) 48 см; c) 6 см; d) 4 см. **110.** a) $B(-5;\ 7{,}5;\ 12{,}5)$; b) $B(5;\ -7{,}5;\ -12{,}5)$; c) $B(-0{,}5;\ 0{,}75;\ 1{,}25)$; d) $B(0{,}5;\ -0{,}75;\ -1{,}25)$. **111.** a) $B(-2{,}5;\ 1;\ 3)$; b) $B(-7;\ 2;\ 6)$. **112.** a) $O_1(0;\ 0;\ 0)$, $A_1(-4;\ 0;\ 0)$, $B_1(0;\ -4;\ 0)$, $C_1\ (0;\ 0;\ -4)$; b) $O_1(-4;\ 0;\ 0)$, $A_1(4;\ 0;\ 0)$, $B_1(-4;\ 8;\ 0)$, $C_1\ (-4;\ 0;\ 8)$. **115.** $(2;-3;\ 3)$.
116. –3. **117.** $(7;\ 1;\ 2)$. **118.** $(1;\ -2;\ 3)$. **119.** $(-1;\ -2;\ -3)$. **120.** $(1;\ 2;\ -3)$. **121.** $(-2;\ -3;\ -5)$.
122. $D(0;\ 9;-7)$. **123.** $C(2;\ 0;-8)$. **124.** 19. **125.** $(-7;\ 7;\ -7)$. **126.** $(1;\ 2;\ 1)$. **127.** $(-2;\ 7;\ 1)$.
128. ±2. **129.** ±3. **130.** 13. **131.** 10. **132.** 9. **133.** 0. **134.** –2. **135.** 1. **136.** 4. **137.** 90°. **138.** 4.
139. –4. **140.** –2; 4. **141.** $8\vec{i}+9\vec{j}-4\vec{k}$.

Ответы к 1 проверочному тесту

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
C	D	D	B	D	B	B	A	A	D	B	B	B	C	A	C	B	D

Ответы к 1 контрольной работе

1) $(1;\ 2;\ -3)$; 2) 13; 3) $\sqrt{2}$; 4) 90°; 5) 1.

Ответы к главе 2

142. 47°, 133°, 47°, 133°. **143.** 128°. **144.** 80°. **145.** 90°. **146.** 5 см, 5 см. **147.** 12 см. **148.** 5 см. **152.** 45°. **153.** 45°. **154.** 80°. **159.** 60°, 45°. **165.** a) 4, 10; b) 5, 12. **166.** Нет. **170.** 6, куб. **171.** 15. **172.** 9. **173.** 180. **174.** 24 см². **175.** 44 см². **176.** 76,8 см². **177.** 17,64 см. **178.** $4\sqrt{3}$см², 4 см. **179.** 124 дм². **180.** 20 м², 30 м². **181.** 8 см, 8 см. **182.** 13 см, 9 см. **184.** 4500 см². **185.** 7,5. **186.** 4. **187.** 480 см². **188.** $5\sqrt{2}$. **189.** 45 см². **190.** 144. **191.** a)18; b)76; c) 110; d) 132; e) 48; f) 96; g) 124. **192.** a) 146; b) 126; c) 108; d) 146. **193.** 84 см. **194.** $3\sqrt{2}$ см². **195.** 216 см². **196.** a) 58; b) 62; c) 94. **197.** a) 38; b) 92; c) 48. **198.** ≈68 м². **199.** 104 см. **200.** 68 см². **201.** 78 см². **204.** 5120 см³. **207.** 144. **209.** 8. **210.** 5. **211.** 6. **212.** 3. **213.** 24. **214.** 2. **215.** 8. **216.** 8. **217.** 72. **218.** 4. **219.** 27 литр. **220.** 4. **221.** 60 см². **222.** $\frac{(S-ab)ab}{4(a+b)}$. **223.** 30 м. **224.** 1200. **225.** a) 4; b) 40; c) 71; d) 88; e) 18; f) 33; g) 78. **226.** a) 90; b) 77; c) 54; d) 96. **227.** 6 м³. **228.** a) 21; b) 26; c) 58. **230.** 6 м³. **231.** $\sqrt{2}$ м³. **232.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **233.** $2\sqrt{\sin 3\alpha \sin^3\alpha}$. **234.** $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **235.** a) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$; b) a^2b; c) $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{4}$. **237.** 3060 м³. **238.** 3 см³. **239.** $\frac{a^3}{8}$. **240.** $3\sqrt{3}$ м³. **241.** На 1 раз. **243.** 24 см³. **245.** 12 см³. **246.** 2 см. **247.** $\frac{ac\sqrt{12a^2-3c^2}}{8}$. **248.** $\frac{h^3\sin\gamma}{2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$. **249.** 6048 м³/ч. **250.** 35200 м³. **251.** 0,5 г/см³. **252.** 150. **253.** 42. **254.** 961. **255.** 13. **256.** 90. **257.** 3315 г. **258.** 60 м². **259.** 24. **260.** 24 см³. **261.** 1927,2 г. **262.** 1927,2 г. **263.** 960 м³. **264.** 144 г. **265.** 19,3125 г/см³. **266.** 440 м³. **267.** 0,0127 м³. **271.** $(y+w+z)yx$. **274.** $a:b:c$. **277.** 240π см², 280π см². **278.** 48 см². **279.** 5 см. **280.** 128 см². **281.** $\pi Q/4$. **282.** 36π см². **283.** 4π. **284.** 36 см². **285.** 12π. **286.** 64. 6. **287.** 3 дм. **288.** $2\sqrt{34}$ см. **289.** 3 дм. **290.** 200π, 250π. **291.** 50, 50 +50/π. **292.** 45π см³. **293.** 16π см². **294.** 1500 см³. **295.** 800 см². **296.** 1000 см². **297.** 5574 см², 1824 см². **298.** 1375π см³, 11,375 кг. **299.** 141900 г, 310860 см². **300.** Первый. **301.** 2041 сум, 15700 см². **302.** 349,45 см², 492 см³, 1747 сум. **303.** 37680 галлонов. **304.** 318 галлонов. **306.** 3 см³. **307.** 4 см. **308.** 9 м³. **309.** 1,125. **311.** a) 45π; b) 3,75π; c) 144π. **312.** a) 14π; b) 937,5π. **313.** 4. **314.** 0,25. **315.** 125π. **316.** 4π. **317.** 3. **318.** 8. **319.** 36. **320.** 36. **321.** 24. **322.** ≈30 м³. **323.** ≈3000 см³. **324.** a) ≈1050 см²; b) ≈2250 см³. **325.** ≈162 кг. **328.** 7. **329.** 4. **330.** 200. **331.** 160. **332.** 4. **333.** 8. **334.** 168. **336.** 1/3. **337.** 1/3. **338.** 144 м³. **339.** 56 см³. **340.** 6. **341.** 2. **342.** 256. **343.** 96. **344.** 91. **345.** 173 π. **346.** 600π. **347.** 20. **348.** 300.

Ответы к 2 проверочному тесту

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
B	A	D	A	B	A	C	C	A	A	A	C	C	A	A	C	A	D

Ответы к 2 контрольной работе

1) 30^0; 2) $2\sqrt{3}+24$; 3) 1513 *л*; 4) 64π см³; 5) 35 дм², 6,5 дм³.

Памятка. *Геометрические задачи повышенной сложности отмечены звёздочкой, задачи, предложенные для решения дома выделены красным цветом.*

Список учебно-методической литературы и электронных ресурсов, использованных при создании учебника и рекомендуемый для дополнительного изучения

1. А.В. Погорелов "Геометрия 10–11", учебник, Москва. "Просвешение", 2009.
2. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. "Математика 11", учебник, Минск, 2013.
3. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов Геометрия. 10–11 класс. учебник, Москва, 2008
4. О.Я. Билянина и др. "Геометрия 11" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
5. Daniel C.Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/ Cole, Cengage Learning, 2011.
6. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
7. Norjigitov X., Mirzayev Ch. Stereometrik masallarni yechish. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. –T., 2004.
8. Israilov I., Pashayev Z. Geometriya. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. II qism. –T.: O‘qituvchi, 2005.
9. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
10. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
11. http://www.ixl.com – Сайт удалённого образования (на английском языке).
12. http://www.mathkang.ru – Сайт международного математического конкурса "Кенгуру".
13. http://www.khanakademy.org – Сайт удалённого образования "Академия Хана" (на английском языке).
14. http://www.brilliant.org – Сайт удалённого обучения математике (на английском языке).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Алгебра и начала анализа: **М.А. Мирзаахмедов, Ш.Н. Исмаилов, А.К. Аманов.**

Геометрия: **Б.К. Хайдаров.**

МАТЕМАТИКА 11
АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА
ГЕОМЕТРИЯ
I ЧАСТЬ

Учебник для 11 классов средних образовательных учреждений и учреждений среднего специального, профессионального образования

Редактор:	Рахимова Д.
Художественный редактор	Убайдуллаев З.
Технический редактор	Гафуров С.
Компьютерная верстка	Шарипова Х.

Издательская лицензия AI № 296. 22.05.2017
Подписано в печать 25.07.2018. Формат $70 \times 100^{1}/_{16}$
Гарнитура «Times New Roman».
Усл.-печ.лист: 12,0 Печ.лист: 11,0.
Тираж 53504 экз.
Заказ № 1940.

Оригинал-макет подготовлен ООО «Zamin Nashr».
100053, г. Ташкент,
улица Богишамол, 160. Tel: 235–44–82

Отпечатано в ООО "CREDO PRINT GROUP"
100053, г. Ташкент,
улица Богишамол, 160. Tel: 234–44–05